

COLOMBIA Y LA ÓRBITA GEOESTACIONARIA: UN VÍNCULO GEOESTRATÉGICO INALIENABLE*

TC. Guillermo Alberto Poveda Zamora

Carlos Enrique Álvarez Calderón

* Este capítulo hace parte del proyecto de investigación de la Maestría en Seguridad y Defensa Nacionales, Desafíos y Nuevos Escenarios de la Seguridad Multidimensional en el Contexto Nacional, Regional y Hemisférico en el Decenio 2015-2025, el cual hace parte del grupo de investigación Centro de Gravedad de la Escuela Superior de Guerra General Rafael Reyes Prieto, reconocido y categorizado en (A1) por COLCIENCIAS, con el código COL0104976. Y del proyecto de investigación de la Maestría en Ciencias Militares Aeronáuticas de la Escuela de Postgrados de la Fuerza Aérea Colombiana “CT. José Edmundo Sandoval”, titulado: Fuerza Aérea Colombiana. De la evolución de las capacidades a la independencia estratégica, adscrito al grupo de investigación en Ciencias Militares Aeronáuticas (GICMA) de la Escuela Militar de Aviación “Marco Fidel Suárez”, categorizado en (C) por COLCIENCIAS, registrado con el código COL0140489.

1. Introducción

Hoy en día, es innegable el aporte tecnológico de los sistemas satelitales a la capacidad de los Estados para garantizar la seguridad multidimensional de sus sociedades; si bien dichos sistemas satelitales proporcionan ventajas en diversas áreas de interés nacional, es imprescindible su tenencia en lo que respecta al desarrollo de las operaciones militares. En efecto, existe una estrecha relación entre los satélites y la seguridad multidimensional de un Estado, ya que la realización de operaciones militares, la eficiente ejecución de los planes de desarrollo de una administración gubernamental, y la atención de desastres naturales en el que puedan llegar a participar diversas instituciones, entre ellas las Fuerzas Militares de Colombia (FFMM), demandan unas extraordinarias comunicaciones, anchos de banda suficientes, y sobre todo, la disponibilidad del máximo tiempo posible del servicio satelital.

Es por esto que en las últimas cinco décadas, ha habido una marcada y acelerada tendencia de instituciones del Estado colombiano como las FFMM por el desarrollo, la ciencia y la tecnología, exigiendo una forma más simple de las coordinaciones para el desarrollo de sus operaciones; en consecuencia, en la Fuerza Aérea Colombiana (FAC) se investiga, analiza y aprende permanentemente sobre las tecnologías satelitales, la forma de administrarlas y, sobre todo, cómo ejercer control en las órbitas de los satélites para explotarlas de la mejor manera posible (Pinilla, 2013).

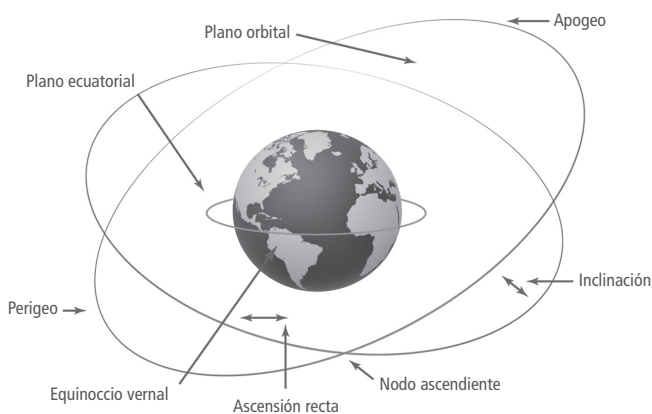
Sin una comprensión completa del movimiento de los cuerpos en el espacio exterior, en esencia, un trasfondo en la “mecánica” de las órbitas,

es difícil dar sentido a la importancia geoestratégica que significaría para Colombia, poseer satélites artificiales propios en las diferentes órbitas terrestres. Más aún, el conocimiento de las órbitas y la mecánica orbital cobra mayor importancia cuando se toma en consideración lo siguiente: al ser una órbita el camino de una nave espacial o satélite atrapado en la gravedad de un cuerpo celeste (sea éste una estrella, un planeta, una luna o cualquier otro cuerpo con significativa masa), las naves espaciales en órbitas estables no gastarían combustible; por tanto, la ruta de vuelo preferida para satélites artificiales y naturales¹⁷ sería una órbita estable, específicamente limitada a una trayectoria operativa precisa. Una órbita se describe primero en términos de altitud y excentricidad, o variación de altitud (Dolman, 1999). Los puntos más altos y bajos en una órbita se llaman “apogeo” y “perigeo”¹⁸, respectivamente (figura 1). Las órbitas generalmente se especifican como circulares (o de altitud constante sin diferenciación de apogeo y perigeo), y elípticas (que son de altitud y excentricidad variables). Una vez que se establecen estos parámetros, la órbita de la nave espacial se puede visualizar como parte de un plano que pasa por el centro de la masa en órbita; el tiempo que tarda una nave espacial en completar una órbita se llama periodo orbital¹⁹.

-
- 17 Satélite se llama a todo objeto secundario que gravita en una órbita cerrada alrededor de un cuerpo celeste más grande. Los satélites naturales (como la Luna terrestre), son cuerpos celestes que orbitan alrededor de un planeta; generalmente, el satélite es más pequeño y acompaña al planeta en su órbita alrededor de su estrella madre. El movimiento de la mayor parte de los satélites naturales conocidos del Sistema Solar alrededor de sus planetas es directo, es decir, de oeste a este y en la misma dirección que giran sus planetas; solamente ciertos satélites de grandes planetas exteriores giran en sentido inverso, es decir, de este a oeste y en dirección contraria a la de sus planetas; probablemente fueron capturados por los campos gravitatorios de los planetas algún tiempo después de la formación del Sistema Solar. Por su parte, se entiende por satélite artificial a cualquiera de los objetos no tripulados puestos en órbita alrededor de la Tierra, quedando por fuera de esta definición los cohetes lanzadores como las cápsulas tripuladas o de carga, los transbordadores espaciales y las estaciones orbitales; tampoco son consideradas satélites artificiales, las sondas espaciales enviadas a cualquier otro destino del Sistema Solar.
- 18 Apogeo es el punto en una órbita elíptica alrededor de la Tierra en el que un cuerpo se encuentra más alejado del centro de ésta, mientras que el punto orbital opuesto, es decir el más cercano, se llama perigeo.
- 19 Hay diferentes periodos relacionados con las órbitas de los objetos: el periodo sideral es la cantidad de tiempo que toma un objeto para hacer una órbita completa; el periodo sinódico es la cantidad de tiempo que tarda un objeto en reaparecer en el mismo punto en relación con dos o más objetos. El periodo draconiano o dracónico, es el tiempo que transcurre entre dos pasajes del objeto a través de su nodo ascendente, el punto de su órbita donde cruza la eclíptica desde el hemisferio sur hasta el hemisferio norte; en cambio, el periodo anomalístico es el tiempo que transcurre entre dos pasajes de un objeto en su periapsis (en el caso de los planetas del Sistema Solar, llamado perihelio), el punto de su aproximación más cercana al cuerpo atrayente. Por último, el periodo tropical de la Tierra (o su “año”), es el tiempo

Se pueden encontrar detalles útiles adicionales determinando la inclinación del satélite, el ángulo medido como la diferencia entre el plano orbital²⁰ del satélite y el plano ecuatorial del cuerpo en órbita, ya que la inclinación da indicaciones de los límites de latitud norte y sur de la órbita. También es útil conocer la posición del plano orbital en relación con un punto fijo en el cuerpo giratorio de la masa en órbita. Para la Tierra, este punto es el equinoccio vernal, y la distancia desde él hasta el paso ascendente o ascendente de la nave espacial sobre el ecuador se llama ascensión recta. Como regla general, cuanto mayor es la altitud, más estable es la órbita, y también más lentamente viaja la nave espacial en relación con el cuerpo que orbita (la velocidad orbital parece aumentar a medida que la nave espacial desciende en espiral por el pozo de gravedad de la masa en órbita).

Figura 1. Características orbitales



Fuente: Elaboración propia.

que transcurre entre dos alineaciones de su eje de rotación con el Sol, también vistas como dos pasajes del objeto en la ascensión recta cero; un año terrestre tiene un intervalo ligeramente más corto que la órbita solar (periodo sideral), debido a que el eje inclinado y el plano ecuatorial avanzan lentamente (giran con respecto a las estrellas), realineándose con el Sol antes de que la órbita se complete.

- 20 El plano orbital de un objeto orbitando alrededor de otro es el plano geométrico en el cual está contenida la órbita. Para ello, se toman en cuenta tres puntos en el espacio para definirlo: el centro del objeto más pesado, el centro del segundo objeto (objeto que orbita), y el centro de este último objeto transcurrido un tiempo.

Las órbitas más bajas son necesarias si se desea una vista cercana o detallada de la Tierra, o si se necesita un enlace concentrado de comunicaciones; en cambio, las órbitas más altas proporcionan un campo de visión muy amplio, sacrificando detalles para la comprensión de imágenes, pero ofreciendo mayor accesibilidad electrónica. Las órbitas de altitud circular o constante se usan, generalmente, para naves espaciales que realizan sus misiones de forma continua a lo largo de todo el curso de la órbita, mientras que, en las órbitas excéntricas, las misiones se llevan a cabo en puntos críticos de la órbita, usualmente en perigeo o apogeo.

La órbita de mayor ascensión vertical tiene una inclinación de 90° , perpendicular al plano ecuatorial; esta órbita también se llama órbita polar, lo que significa que la nave espacial pasa sobre los polos Norte y Sur en cada órbita completa. Por su parte, la inclinación más baja es 0° , lo que quiere decir que la órbita coincide con el plano ecuatorial; en este sentido, las inclinaciones por debajo de 90° son posígradas, es decir, que tienden a desplazarse hacia el este en cada paso orbital, mientras que las inclinaciones por encima de 90° son retrógradas y tienden a desplazarse hacia el oeste. Si la altitud de la nave espacial es constante a 36.000 kilómetros sobre la superficie terrestre, la nave espacial aparecerá fija en relación con un punto sobre la Tierra. A ésta se le llama órbita geoestacionaria, y es la única que tiene esta capacidad de punto fijo; de allí su enorme importancia geoestratégica.

Las órbitas que se ven afectadas por fuerzas distintas de la constante masa gravitacional del cuerpo en órbita, tienen fluctuaciones en su movimiento natural, por lo que la órbita de un satélite artificial nunca es perfectamente circular debido a estas fluctuaciones, llamadas perturbaciones (Vallado, 2006). Por ende, cuanto más baja es la altitud de una nave espacial, más significativa es la fricción causada por una atmósfera invasiva, y en este sentido, las órbitas por debajo de unos 160 kilómetros de altitud (o un periodo orbital de 87.5 minutos), son teóricamente posibles, pero prácticamente alcanzables debido a la acumulación de resistencia atmosférica. En contraste, los efectos del arrastre atmosférico se reducen significativamente a medida que aumentan los periodos (altitudes), razón por la cual aquellos satélites una órbita circular con

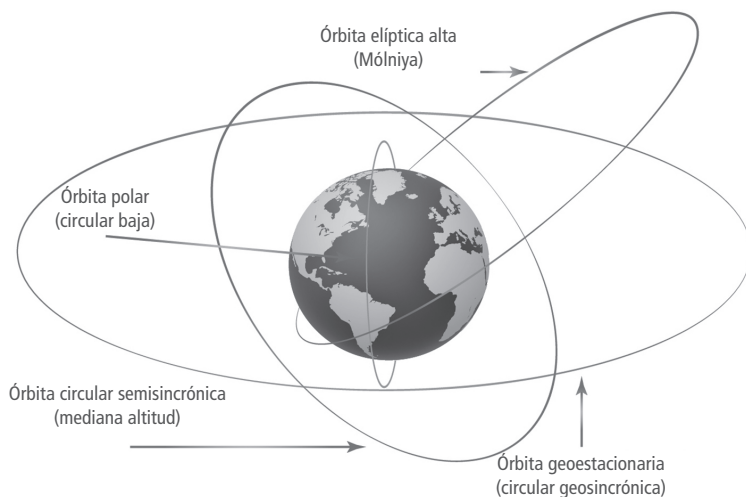
un periodo de menos de 93 minutos, requieren grandes cantidades de combustible para realizar correcciones orbitales (debido al arrastre atmosférico y otras perturbaciones), mientras que los satélites artificiales en órbitas circulares con un periodo superior a 101 minutos, no se ven esencialmente afectados por la atmósfera, por lo que requieren relativamente pocos ajustes.

Las perturbaciones también provienen de la protuberancia en el ecuador de la Tierra, causada por la fuerza centrífuga de su rotación de más de 1.609 kilómetros por hora, lo que significa que la atracción gravitacional del planeta no es constante (Vallado, 2006). Como la Tierra está aplanada ligeramente en los polos y distendida en el ecuador, también crea pequeñas desviaciones en la trayectoria de vuelo de un cohete o un misil balístico; otras perturbaciones a medida que un artefacto se aleja de la Tierra son los campos gravitacionales del Sol, la Luna y otros cuerpos celestes, los efectos de la radiación y las erupciones solares, así como los impactos de meteoritos y la basura espacial, que pueden llegar a golpear un satélite a hipervelocidad. Por tanto, ninguna órbita es del todo perfecta, por lo que todas las naves espaciales deberían tener algo de combustible para hacer correcciones ocasionalmente; en otras palabras, la vida útil de un satélite artificial u otra nave espacial sería en su mayor parte, una función de su capacidad de combustible y su estabilidad orbital.

Ahora bien, las órbitas terrestres vienen en cuatro categorías, basadas en la altitud y su utilidad (figura 2). La primera abarca órbitas de baja altitud, entre 150 y 800 km sobre la superficie de la Tierra, que son particularmente útiles para el reconocimiento de la Tierra (observación militar y gestión de recursos), así como misiones de vuelo tripulado²¹. Estas altitudes permiten de 14 a 16 órbitas completas por día y tienen la ventaja adicional de que los satélites se pueden colocar en ellas con cohetes de dos etapas (más baratos y menos sofisticados)²².

21 Los vuelos tripulados generalmente tienen bajas inclinaciones para maximizar la nave espacial y controlar el contacto del centro, mientras que los vuelos de reconocimiento generalmente tienen altas inclinaciones para maximizar la cobertura de la superficie de la Tierra.

22 Las órbitas con un periodo superior a 225 minutos (por encima de 800 kilómetros), requieren al menos un impulso de la tercera etapa para alcanzar la órbita final.

Figura 2. Órbitas terrestres

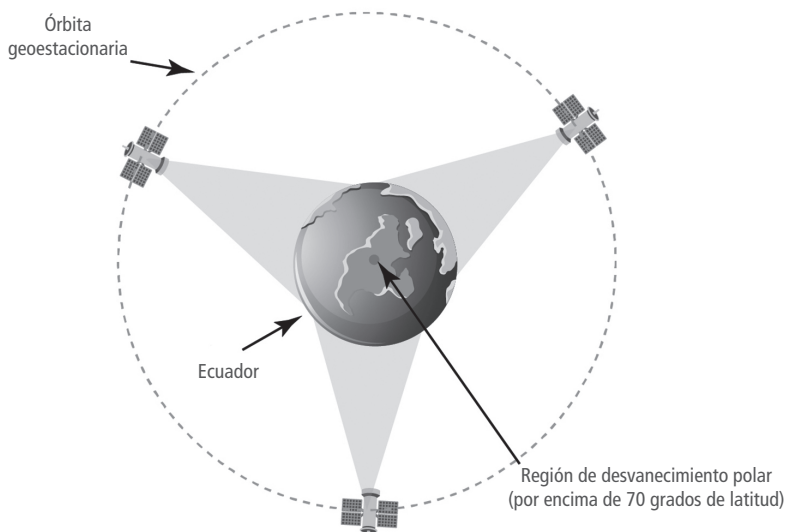
Fuente: Elaboración propia.

Por su parte, las órbitas de altitud media permiten de 2 a 14 órbitas por día, y varían de 800 a 35.000 kilómetros de altitud. Son generalmente órbitas circulares o de baja excentricidad que admiten redes de satélite vinculadas, por lo que actualmente son los satélites de navegación, que fijan las posiciones terrestres a través de la triangulación de al menos dos o más satélites a la vista, los que dominan esta órbita. En cambio, las órbitas de gran altitud, de al menos 35.000 kilómetros, proporcionan una cobertura de comunicaciones continua con la Tierra con un mínimo de satélites en órbita. Los satélites a gran altitud orbitan la Tierra no más de una vez al día, por lo que cuando el periodo orbital es idéntico a una rotación completa de la Tierra, se logra una órbita geosincrónica; y en este tipo de órbita, con una inclinación de 0° (colocada directamente sobre el ecuador), un satélite aparece fijo en el cielo desde cualquier punto de la Tierra.

Esta es la valiosa órbita geoestacionaria (figura 3), no solo por su importancia para la economía espacial de los Estados, sino por su relevancia estratégica para la seguridad nacional en el desarrollo de operaciones militares que dependen de las comunicaciones y de la información

meteorológica que pueden llegar a reducir la “niebla de la guerra” (Álvarez, Corredor y Vanegas, 2018).

Figura 3. Campos de visión geoestacionarios



Fuente: Elaboración propia.

En efecto, solo tres satélites en órbita geoestacionaria, cuidadosamente colocados equidistantes entre sí, pueden ver todo el planeta hasta aproximadamente 70° de latitud norte o sur, ya que un satélite en órbita geoestacionaria tiene un campo de visión del 28% de la superficie terrestre. Como los satélites no parecen moverse, las antenas fijas en Tierra pueden acceder a ellos de manera fácil y continua, razón por la cual las comunicaciones globales y los satélites meteorológicos generalmente se colocan en esta órbita.

Para aquellas latitudes superiores a 70° , la ventaja de permanencia geoestacionaria de tiempo prolongado se desvanece. Por tanto, una técnica para superar esta deficiencia es utilizar la cuarta categoría orbital, es decir, la órbita altamente elíptica; que se describe como altamente excéntrica con un perigeo tan bajo como 250 kilómetros y un apogeo de

hasta 700.000 kilómetros²³, lo cual implica que, colocado en una órbita altamente inclinada con apogeo a 36.000 a 40.000 kilómetros, un satélite parece habitar en las latitudes superiores durante varias horas, lo que la convierte en una órbita particularmente útil para satélites de comunicaciones que prestan servicios en regiones árticas; esta pausa aparente ocurre porque la velocidad del satélite en apogeo es de solo 4.828 kilómetros por hora, mientras que en perigeo es de más de 32.186 kilómetros por hora. Cuando se conectan en red en la misma órbita, uno detrás del otro con ascensiones rectas igualmente espaciadas, un mínimo de tres satélites puede acceder continuamente a una sola estación terrestre de alta latitud. Finalmente, una órbita altamente elíptica con apogeo a más de 700.000 kilómetros puede tener un periodo de más de un mes, y es especialmente útil para misiones científicas.

Con base en lo anterior, y como aporte a la imperiosa necesidad de situar satélites de gran envergadura para Colombia en diferentes órbitas terrestres, especialmente en la órbita geoestacionaria, este capítulo hace uso de la astrodinámica y la mecánica orbital en la realización de todos los cálculos matemáticos que definen una órbita geoestacionaria para un Satélite Geoestacionario Colombiano (SGC), que garantice el máximo tiempo de cobertura posible sobre el país. Se generan los elementos que describen dicha órbita, para simularla y así representar al satélite, la trayectoria que describe y observar su comportamiento. La importancia de este ejercicio está centrada en el aporte que hace a la ingeniería aeroespacial colombiana, por cuanto los estudios de órbitas en Colombia son escasos, tanto en su cálculo como en su administración. Definir esta órbita es necesario, porque a partir de este concepto, se desglosa toda la planeación del vuelo del satélite, tanto en tiempo de vida útil, como esfuerzos de control, tiempo de exposición o cobertura sobre Colombia y los costos de poner el satélite en dicha órbita.

Para los cálculos a desarrollar más adelante, se asumen las siguientes características técnicas básicas del SGC:

23 Cabe resaltar que, en teoría, la atracción gravitacional de la Tierra se extiende alrededor de 900.000 kilómetros (una 166va parte de la distancia entre la Tierra y el Sol, y aproximadamente el doble de la distancia entre la Tierra y la Luna). Más allá de esta distancia, las órbitas terrestres no son posibles, ya que una nave espacial será atraída hacia el campo gravitacional de otro cuerpo celeste.

- Satélite geoestacionario
- Alto: 1,5 metros
- Ancho: 1,5 metros
- Largo: 1,5 metros
- Volumen total: 3.375 metros cúbicos
- Masa: 1.000 Kg.
- Distancia del centro de la Tierra; 42.164 kilómetros desde la línea del ecuador

2. Análisis teórico de una propuesta de órbita para un SGC

2.1. Generalidades de mecánica orbital

A continuación, se definen algunos términos de la dinámica clásica, con apoyo en la teoría de la conservación del movimiento lineal y movimiento relativo, la ley de las áreas y las leyes de Kepler, para el análisis de las variables utilizadas en el cálculo de los elementos orbitales en el planteamiento y solución del problema.

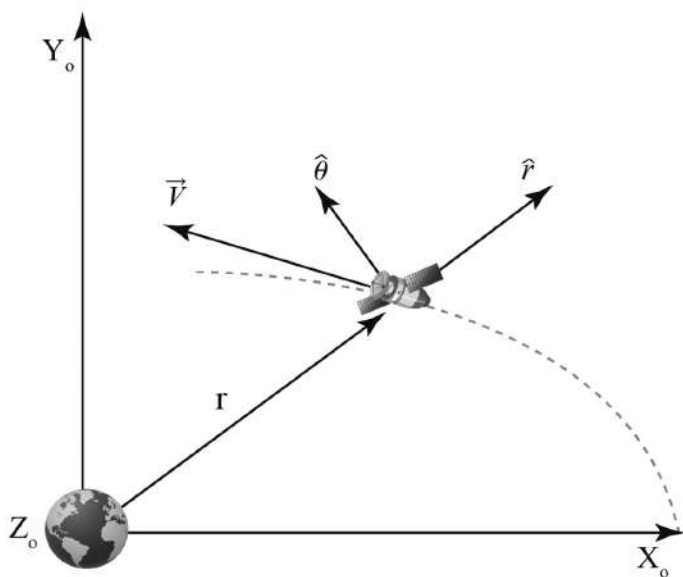
2.1.1. *El problema de los dos cuerpos*

Analiza fundamentalmente la dinámica que incorpora el movimiento de dos masas como un sistema, que se mueven gracias a la atracción gravitacional que se ejercen mutuamente; es el caso de la Tierra y el satélite. Se establece el análisis matemático de cada uno de los elementos orbitales, desde el movimiento elíptico, hasta el análisis de anomalías (Alvarado, 2013), el planteamiento de la integral de energía y la dependencia física que existe entre el movimiento y el tiempo, lo que conduce al cálculo de diferentes velocidades dentro de las órbitas de un futuro satélite colombiano (Poveda, 2016).

2.1.1.1. Ecuación del movimiento. La ecuación del movimiento entre la Tierra de masa M y un satélite con masa m , se establece admitiendo

que solo se encuentran estos dos cuerpos interactuando en el espacio (De Orús, Català y Núñez, 2007). El sistema de coordenadas usado para plantear la órbita del satélite puede observarse en la figura 4.

Figura 4. Sistema de coordenadas para describir la órbita del satélite



Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse en la figura 4, el origen es el centro de la Tierra, y para describir el movimiento del satélite se han empleado las coordenadas polares r , θ y el eje $Z=0$. (Gómez, 2010). Al establecer el movimiento del satélite en torno a la Tierra, se genera un equilibrio entre las fuerzas que interactúan entre las dos masas; éstas son la fuerza de atracción y la fuerza centrífuga que describe el movimiento del satélite por cuenta de su velocidad angular y movimiento en la órbita. De acuerdo con la ley universal de la Gravitación (Cohen, 1987), los cuerpos se atraen entre sí (Battin, 1987), respecto a la recta que los une bajo una fuerza F .

$$\vec{F}_g = G \frac{M * m}{r^2} (-\hat{r}) \quad (1.1)$$

Donde m es la masa del satélite, M es la masa de la Tierra, y r es la distancia entre los dos centros de masa, $-r \hat{r}$ el vector unitario de m respecto a M , y G es la constante universal de la gravitación (Universidad Politécnica de Madrid, 2013; De Orús, et al., 2007):

$$G = 6,6710 \times 10^{-11} \left[\frac{m^2}{(Kg \cdot Seg^2)} \right] \quad (1.2)$$

La fuerza de gravedad de la expresión (1.1) se representa a continuación, ya que al reemplazar se obtiene la ecuación diferencial así:

$$\vec{F}_g = m \vec{a} \quad (1.3)$$

$$\vec{F}_g = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.4)$$

$$\vec{F}_g = m \frac{d^2 (r \vec{r})}{dt^2} \quad (1.5)$$

Conociendo que las fuerzas son iguales, es decir están en equilibrio para que la órbita del satélite describa un movimiento continuo sobre ésta, se igualan las expresiones (1.1) y (1.3) y se establece la ecuación fundamental del movimiento.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \vec{r} \frac{k}{r^2} = 0 \quad (1.7)$$

En la expresión (1.7) aparece una nueva constante k , llamada la constante de Kepler, la cual se calcula con la expresión (1.2). Para todos los cálculos se utiliza un valor de 5.979×10^{24} Kg que es la masa aproximada de la Tierra (Neff, 1995) y un radio de la Tierra R_t definido como $R_t = \text{radio ecuatorial} = 6.378,140 \text{ km}$ (The International Astronomical Union, 1964), con estos valores se obtiene:

$$k = GM$$

$$k = 6,6710 \times 10^{-11} \left[\frac{m^2}{(Kg \text{ Seg}^2)} \right] 5,979 \times 10^{24} \text{ Kg} \quad (1.8)$$

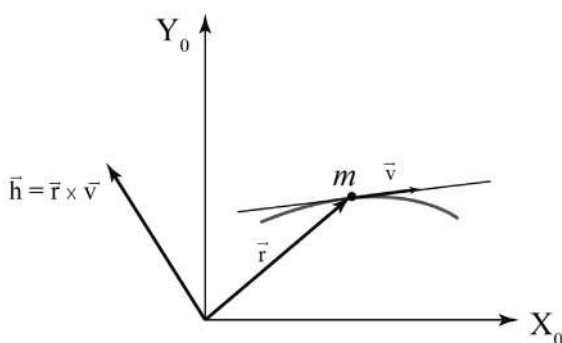
$$k = 3,986 \times 10^{14} \left[m^3 / \text{seg}^2 \right] \quad (1.9)$$

Ahora se multiplica vectorialmente el vector posición $\vec{r}$ por la expresión (1.7) y se obtiene:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \vec{V} = \vec{h} \quad \text{Constante} \quad (1.10)$$

El término $\vec{h}$ es el momento angular orbital del satélite por unidad de masa, el cual es constante por ser perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{V}$. La relación entre el momento angular y la velocidad y posición del satélite puede observarse en la figura 5, así:

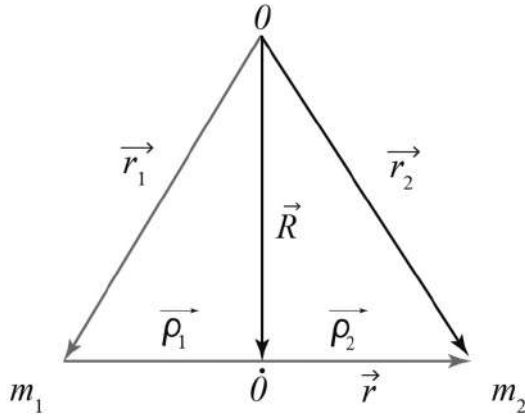
Figura 5. Relación, posición, velocidad y momento angular



Fuente: Martínez y Calvo (2010)

2.1.2. Conservación del momento lineal

Analizando la conservación del momento lineal, observado desde un punto 0, de las dos masas respecto m_1 y m_2 como se observa en la figura 6 se plantea que:

Figura 6. Conservación del momento lineal

Fuente: Elaboración propia.

m_1 = masa de la tierra y m_2 = masa del satélite

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.11)$$

Donde en consideración de la expresión (2.1) y la Figura 4 se puede deducir:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \end{cases} \quad (1.12)$$

Considerando el centro de masa del sistema con los dos cuerpos descritos, se plantea que:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R} \quad (1.13)$$

Añadiendo la ecuación (1.12) y diferenciando en la ecuación (1.13) respecto al tiempo se obtiene:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = 0 \quad (1.14)$$

De la expresión (1.14) se puede inferir que el centro de masa de los dos cuerpos no tiene aceleración, en virtud del análisis basado solo en dos cuerpos, sin existencia de ninguna otra fuerza externa que afecte el sistema. Simplificando el sistema, se divide (1.12) por m_1 y m_2 respectivamente, obteniendo:

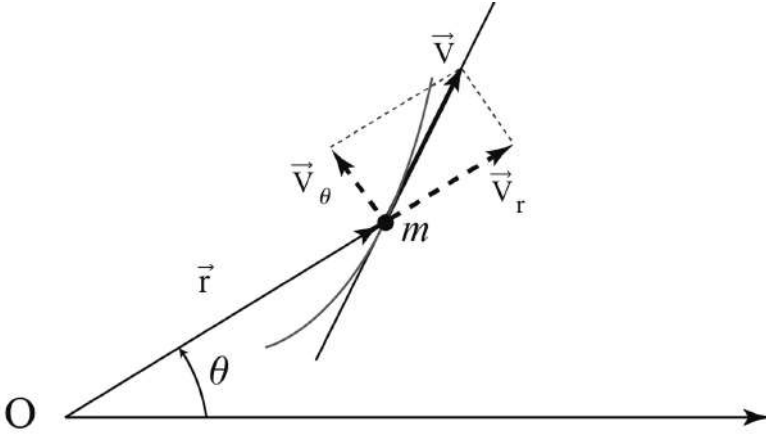
$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} = -G \frac{(m_1+m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (1.15)$$

Simplificando (1.15), remplazamos $G(m_2+m_1)$ por μ obteniendo la siguiente ecuación diferencial así:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (1.16)$$

Ésta finalmente es la ecuación del movimiento relativo de la m_2 respecto a la m_1 , ecuación (1.16), también llamada kepleriano. Esta ecuación permite deducir que mientras las dos masas sean constantes, el movimiento por atracción gravitacional de las dos será también constante en un radio específico; como resultado, se puede esperar que el movimiento de las dos masas sea constante, lo que facilita el cálculo de las velocidades y los tiempos en las órbitas del satélite alrededor de la Tierra (Baruh, 1999).

Para expresar la posición del satélite en términos de $\vec{r}$ se debe usar el sistema de coordenadas polares, y como el vector velocidad es tangente a la trayectoria, se pueden descomponer sus dos elementos tanto radial V_r y transversal V_θ como se puede observar en la figura 7 así:

Figura 7. Vectores que Componen la Velocidad

Fuente: Martínez y Calvo (2010)

Las componentes se expresan en términos de r y θ

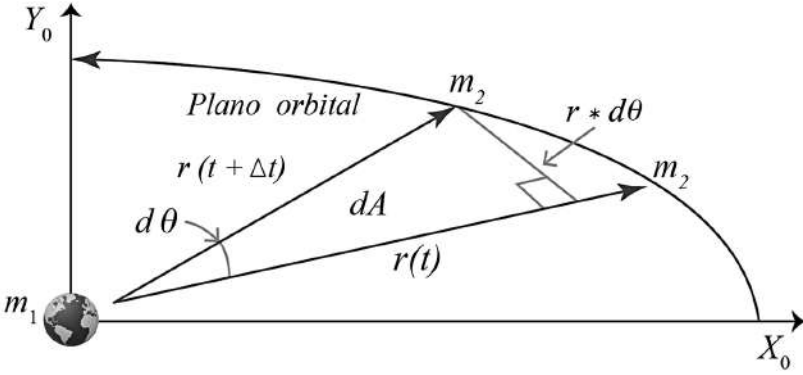
$$\vec{V} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} \quad (1.17)$$

Usando como referencia la figura 4, la dirección del momento angular $\vec{h}$, y teniendo en cuenta que $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z} = \hat{z}_0$, según lo expuesto por Baruh (1999), se puede inferir que la magnitud de la ecuación es:

$$r^2 \dot{\theta} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{constante} \quad (1.18)$$

En la figura 8 puede observarse el diferencial de área barrida por el radio vector de posición del satélite dA .

Figura 8. La Ley de las Áreas



Fuente: Montenbruck y Gill (2012)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{constante} \quad (1.19)$$

Analizando la figura 8 en contraposición con la expresión (1.19), puede deducirse que las áreas barridas por el radio vector en tiempos iguales son iguales. Esta es la segunda ley de Kepler, también conocida como Ley de las Áreas, y que permitirá efectuar los cálculos de tiempos y los periodos en las órbitas (Baruh, 1999). De la misma manera, de la figura 8 se pueden plantear unas componentes de la aceleración, transversal y radial así:

Componente radial

$$m_2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_g = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (1.20)$$

Componente trasversal

$$m_2(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (1.21)$$

Haciendo cambio de variable por $\frac{1}{r} = u$, la ecuación (1.20) que describe el movimiento del satélite en términos de u acorde a lo descrito por Baruh (1999), está definida por:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_1}{h^2} \quad (1.22)$$

La expresión (1.22), siendo una ecuación diferencial de segundo orden, se puede resolver obteniendo la suma de su solución particular $u = \frac{Gm_1}{h^2}$, y la solución de la homogénea $u = c \cdot \cos(\theta - \theta_0)$ donde c es una constante. Haciendo $\theta - \theta_0 = 0$, es decir en el perigeo de la órbita, se tiene la expresión de la trayectoria del satélite en el plano orbital:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = u &= \frac{Gm_1}{h^2} + c \cos(\theta - \theta_0) \\ \frac{1}{r} &= \frac{Gm_1}{h^2} + c \cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.23)$$

2.1.2. Movimiento elíptico

El estudio del movimiento elíptico del satélite alrededor de la Tierra, se simplifica analizando los ángulos o anomalías que describen su movimiento, de donde aparecen el periodo de revolución o parámetro p y excentricidad e (Montenbruck y Gill, 2012). La expresión (1.23) es la de una sección cónica en coordenadas polares (r, θ) , estando el origen en el foco de la elipse, describiendo una ecuación general para esta familia de curvas así:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta)] \quad (1.24)$$

El parámetro e es denominado excentricidad, y su valor determina el tipo de curva que describe el satélite alrededor del planeta (Baruh, 1999). Los parámetros p y e están dados por:

$$p = \frac{h^2}{Gm_1} \quad (1.25)$$

$$e = \frac{c \cdot h^2}{Gm_1} = c p \quad (1.26)$$

Los valores de c y e que describen diferentes tipos de curvas según Montenbruck y Gill (2012), son:

Si $e=c=0$ la forma es una circunferencia

Si $e = 1$ o $c = \frac{Gm_1}{h^2}$ la forma es una parábola

Si $e > 1$ o $c > \frac{Gm_1}{h^2}$ la forma es una hipérbola

Si $0 < e < 1$ o $c < \frac{Gm_1}{h^2}$ la forma es una elipse

Para el presente proyecto, el valor de interés de que se utilizó es $0 < e < 1$ o $c < \frac{Gm_1}{h^2}$, debido a que es el único que corresponde a una trayectoria cerrada del satélite alrededor de la Tierra. Teniendo en cuenta la expresión (1.19), y la segunda ley de Kepler, respecto a la variación del área respecto al tiempo, se plantea que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = \text{Constante} \quad (1.27)$$

Entonces, el periodo para una órbita elíptica de acuerdo con lo expuesto por Baruh (1999), se deduce de:

$$T = \frac{A}{dA} = \frac{\pi ab}{h/2} \quad (1.28)$$

Donde πab es el área de la elipse, b que es el semieje menor, está dado por $b = \sqrt{1 - e^2}$ y la expresión $h = \sqrt{Gm_1 a(1 - e^2)}$ y haciendo la operación se obtiene (Baruh, 1999):

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{Gm_1 a(1-e^2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_1}} \quad (1.29)$$

El periodo de la órbita:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_1}} \quad (1.30)$$

De la expresión (1.30) se puede despejar el movimiento medio n , así:

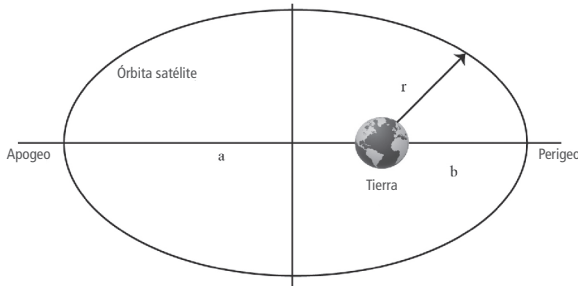
$$n = \sqrt{\frac{Gm_1}{a^3}} \quad (1.31)$$

La expresión (1.30) se conoce como la tercera ley de Kepler; para toda elipse, los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores (Curtis, 2005) Los valores máximos del radio posición del satélite serán máximo en el apogeo y mínimo en el perigeo (Martínez, 2009), y en función de la figura 9 se pueden describir como:

$$r_{perigeo} = \frac{P}{1+e} \quad (1.32)$$

$$r_{apogeo} = \begin{cases} \frac{P}{1+e^2} & \text{hasta } 0 \leq e < 1 \\ \infty & \text{hasta } 1 \leq e \end{cases} \quad (1.33)$$

Figura 9. Órbita elíptica



Fuente: Elaboración propia.

Estos mínimos y máximos son el perigeo y el apogeo respectivamente; el valor medio de las distancias mínima y máxima se conoce como el semieje mayor a

$$a = \frac{1}{2}(r_{\text{perigeo}} + r_{\text{apogeo}}) = \frac{P}{1+e^2} \quad (1.34)$$

2.2.1. Anomalías excéntrica y verdadera

Una vez definido el movimiento elíptico y las expresiones que describen su trayectoria, es necesario determinar la posición del satélite en función del tiempo $\frac{dr}{dt}$, para lo cual se recupera la expresión (1.18), llevándola a la expresión (1.22):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{r \cdot v}{r^2} = \frac{\sqrt{p \cdot k}}{r^2} \quad (1.35)$$

Y considerando la expresión (1.31), se plantea:

$$r = \frac{P}{1+e^2 \cdot \cos\theta} = \cos\theta = \frac{p-r}{r \cdot e} \quad (1.36)$$

Al derivar la expresión (1.36):

$$-\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{-p}{e \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{p-r}{e \cdot r}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{p \cdot k}}{r^2} = \frac{p}{e \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Al resolver se obtiene:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{k}{p \cdot r^2} [-(1 - e^2)r^2 - p^2 - 2pr]} \quad (1.37)$$

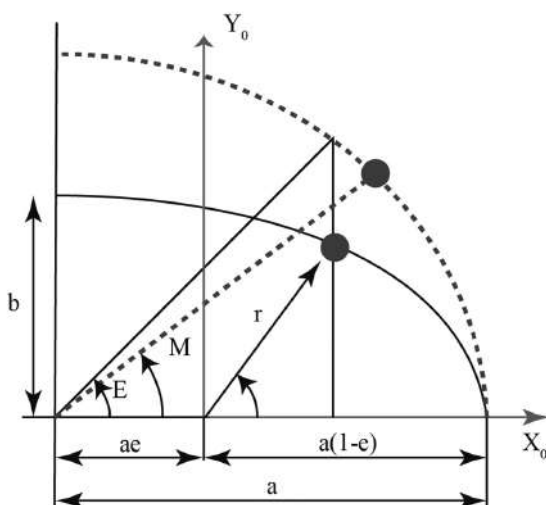
En la expresión (1.37) sustituimos la expresión (1.34) para calcular $\frac{dr}{dt}$ así:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{k}{pr^2} \left[-\frac{p}{a}r^2 - (p-r)^2 \right]} = \sqrt{\frac{k}{ar^2} [-r^2 - ap + 2ar]} \\ &= \sqrt{\frac{k}{ar^2} [-r^2 - a^2(1 - e^2) + 2ar]} = \sqrt{\frac{k}{ar^2} [a^2e^2 - r^2 - a^2 + 2ar]} \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{k}{ar^2} [a^2 e^2 - (a - r)^2]} \quad (1.38)$$

En la figura 10 puede observarse las tres anomalías que describen el movimiento del satélite, E anomalía excéntrica, M anomalía media o principal, y θ anomalía verdadera.

Figura 10. Anomalías en la órbita



Fuente: Martínez y Calvo (2010)

De acuerdo con lo expuesto por Curtis (2005) y Martínez y Calvo (2010), la anomalía es un ángulo formado por el vector r y la posición del satélite. Éste es tomado en sentido anti-horario: si la referencia del satélite es en el foco de la elipse y en la dirección del perigeo en X_0 , es llamada anomalía verdadera; pero si el ángulo es tomado desde el centro de la elipse, entre la dirección del perigeo y la intersección con el círculo principal de la elipse, es llamada anomalía excéntrica E . Finalmente, el ángulo tomado desde el centro de la elipse entre la dirección del perigeo X_0 y la posición en el círculo principal de la elipse, donde un satélite ficticio con velocidad constante, tendría el mismo periodo orbital que

el propio satélite en la órbita elíptica, esta anomalía se llama anomalía media M . (Poveda, 2016). En concordancia con lo expuesto, de la figura 10, inicialmente puede deducirse que:

$$a \cdot \cos E = ae + r \cdot \cos \theta = c + r \cos \theta \quad (1.39)$$

Considerando las expresiones (1.26) y (1.34), se calcula la anomalía excéntrica E , la cual, de acuerdo con lo expuesto por Martínez y Calvo (2010), se define como:

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad (1.40)$$

De manera similar, se puede calcular la anomalía verdadera θ , a partir del vector r y la anomalía excéntrica E , así:

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - \cos E} \quad (1.41)$$

$$a \cdot \cos \theta = ae + r \frac{\cos E - e}{1 - \cos E}$$

$$r = a(1 - e \cdot \cos E) \quad (1.42)$$

2.1.2.1. Anomalía media. Introduciendo la expresión (1.42) en la ecuación diferencial deducida en la expresión (1.38) para obtener una expresión en términos de $\frac{dE}{dt}$, se obtiene:

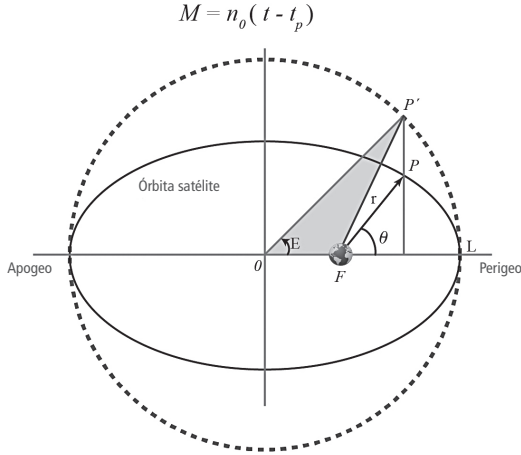
$$E - e \cdot \sin E = \sqrt{\frac{k}{a^3}} \cdot (t - t_p) \quad (1.43)$$

t_p es el parámetro que indica el momento de paso por el perigeo, en donde la anomalía excéntrica E es cero. Al existir dos raíces posibles, el valor negativo será un satélite girando en sentido contrario. La anomalía media M , como se observa en la figura 10, puede expresarse como el ángulo conformado por el semieje del perigeo de un satélite ficticio girando a velocidad constante sobre una circunferencia de radio a , en la que se

describe la órbita elíptica; de esta manera, el valor de M puede obtenerse de una velocidad angular media n_0 de la siguiente forma:

$$M = n_0(t - t_p) \quad (1.44)$$

Figura 11. Geometría de la anomalía media



Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse en la figura 11, se plantea una geometría que permita, a partir de la anomalía excéntrica E , calcular la anomalía media M . Como fue descrito en la expresión (1.19) de la segunda ley de Kepler, el área recorrida por el radio vector de posición del satélite, r , gira a velocidad constante, de acuerdo con la figura 11, y según lo expuesto por Martínez y Calvo (2010), el área compuesta por los vértices F , P' y L en el perigeo (A_{FPL}), es una sección de toda el área de la elipse (A_{elipse}), determinada de la siguiente manera:

$$A_{FPL} = \frac{(t-t_p)}{T} * A_{elipse} = \frac{(t-t_p)}{T} \pi ab \quad (1.45)$$

El área recorrida, descrita por el área $FP'L$ (A_{FPL}), en el mismo intervalo de tiempo $(t - t_p)$ se puede expresar por:

$$A_{FP'L} = \frac{(t-t_p)}{T} * A_{Circulo} = \frac{(t-t_p)}{T} \pi a^2 \quad (1.46)$$

Para hallar el área descrita por los vértices F, P' y L, basta con plantear la siguiente resta:

$$\begin{aligned} A_{FP'L} &= A_{OP'L} - A_{OP'F} \\ \frac{(t-t_p)}{T} \pi a^2 &= \frac{E}{2\pi} \cdot \pi a^2 - \frac{1}{2} a e \cdot \sin E = \frac{1}{2} E a^2 - \frac{1}{2} a^2 \cdot e \cdot \sin E \\ \frac{(t-t_p)}{T} \pi a^2 &= \frac{1}{2} E a^2 - \frac{1}{2} a^2 \cdot e \cdot \sin E \end{aligned} \quad (1.47)$$

Multiplicando la expresión (1.47) por $\frac{2}{a^2}$ para reducirla, y llevarla a la forma de la expresión (1.44), considerando también la expresión (1.35) así:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(t-t_p)}{T} \pi a^2 \right] \cdot \frac{2}{a^2} &= \left[\frac{1}{2} E a^2 - \frac{1}{2} a^2 \cdot e \cdot \sin E \right] \cdot \frac{2}{a^2} \\ M &= E - e \cdot \sin E = n(t - t_p) \\ M &= E - e \cdot \sin E \end{aligned} \quad (1.48)$$

La expresión (1.48) se conoce como la ecuación de Kepler y, permite con el cálculo de la anomalía media, conocer la posición del satélite sobre la órbita que éste describe.

2.1.3. Los elementos orbitales

Éstos se determinaron a partir de los vectores de posición y velocidad, que describen el movimiento del satélite alrededor del planeta; básicamente, el problema orbital como fue determinado en la expresión (1.16), requiere seis condiciones iniciales o constantes de integración, ya que es una ecuación diferencial de segundo orden que se representa en tres dimensiones. Estos elementos orbitales pueden observarse en las figuras 13 y 21; se describen a continuación así:

Forma de la órbita

- | | |
|------------------|-----|
| a) Semieje mayor | a |
| b) Excentricidad | e |

Posición a lo largo de la órbita

- | | |
|-------------------------------|-----|
| a) Anomalía media o principal | M |
|-------------------------------|-----|

Orientación de la órbita en el espacio

- | | |
|--|----------|
| a) Recta de ascenso o nodo de ascenso RAAN | Ω |
| b) Inclinación | i |
| c) Argumento del perigeo | ω |

2.1.3.1 Forma de la órbita.

• Semieje mayor: como se observó en el literal 2.1.2 movimiento elíptico, fue deducido el semieje mayor de acuerdo con la expresión (1.34) así:

$$a = \frac{1}{2} (r_{perigeo} + r_{apogeo}) = \frac{P}{1+e^2} \quad (1.49)$$

• Excentricidad: fue calculada en el literal 2.1.2, resaltando el hecho que el valor de e se encuentra restringido en el presente proyecto a: $0 < e < 1$ o $c < \frac{Gm_1}{h^2}$ por ser los únicos valores de los que describen una órbita elíptica sobre el planeta, en tal virtud, será también positiva y, despejando de la expresión (1.34) se puede inferir que:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (1.50)$$

2.1.3.2 Posición del satélite en la órbita.

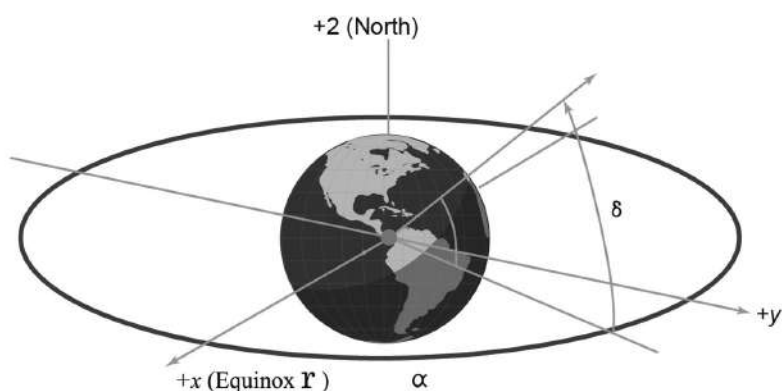
• Anomalía principal: este parámetro fue deducido en el literal 2.2.2; fue calculada con relación a la anomalía excéntrica E y excentricidad de acuerdo con la expresión (1.48) así:

$$M = E - e \cdot \sin E$$

2.1.3.3 Orientación de la órbita en el espacio.

Para determinar la órbita en el espacio se debe hacer un análisis de las coordenadas ecuatoriales a orbitales; el sistema de coordenadas ecuatorial se puede observar en la figura 12, donde el eje de rotación está alineado con el ecuador.

Figura 12. Sistema de coordenadas ecuatorial



Fuente: Montenbruck y Gill (2012)

La rotación se hace sobre el eje z y el plano ecuatorial lo forman los ejes x, y ; además, el eje x para tomar las referencias, se alinea con el equinoccio de primavera Y , ya que éste describe la intersección del plano ecuatorial con el plano orbital (equinoccio de primavera).

Es así como la longitud se mide desde el meridiano de Greenwich hasta el meridiano del lugar; se cuenta desde 0° hasta $+180^\circ$ hacia el este y desde 0° hasta -180° hacia el oeste. La latitud se mide desde el ecuador hacia el norte (0° hasta $+90^\circ$) y hacia el sur (0° hasta -90°).

Por otro lado, en coordenadas polares, también se describen la ascensión α , la declinación δ y la distancia geocéntrica r . La conversión entre estos dos sistemas de coordenadas es:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

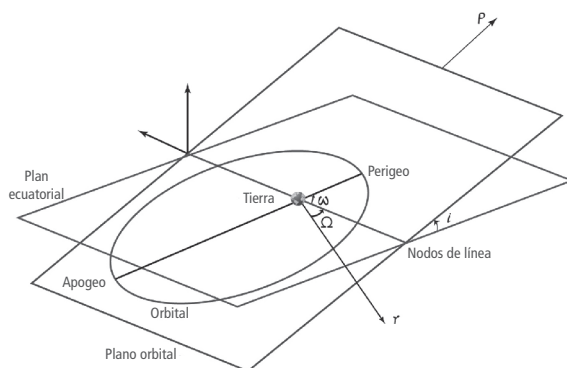
Donde:

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x} \quad \delta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.52)$$

$$\left. \begin{array}{l} -90^\circ < \alpha < +90^\circ \text{ para } x > 0 \\ +90^\circ < \alpha < +270^\circ \text{ para } x < 0 \end{array} \right\} \quad (1.53)$$

Se deben asociar las coordenadas ecuatoriales a los elementos orbitales inclinación, recta de ascenso o nodo de ascenso RAAN (Ω) y argumento del perigeo (ω); como se puede observar en la figura 13, el sistema de coordenadas de un satélite se toma en referencia al plano ecuatorial descrito por la Tierra, y el plano orbital descrito por el satélite.

Figura 13. Elementos orbitales



Fuente: Montenbruck y Gill (2012)

En la figura 13 pueden observarse tres vectores: $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{W}$, conocidos también como vectores unitarios o gaussianos, que provienen del sistema de coordenadas ecuatoriales asociando a los elementos orbitales (Lin y Yan, 2006) así:

- $\vec{W}$ Vector perpendicular al plano de la órbita
 $\vec{P}$ Vector en el plano de la órbita y en el sentido del perigeo
 $\vec{Q}$ Vector en el plano de la órbita y perpendicular a $\vec{P}$ de modo que $\vec{Q} = \vec{W} \wedge \vec{P}$

Los vectores son ortogonales de dos en dos, es decir $\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{P} \cdot \vec{W} = \vec{Q} \cdot \vec{W} = 0$ y además también son unitarios. Siendo descritos estos vectores, ahora se busca que los ejes de coordenadas rectangulares coincidan con las direcciones de estos tres vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{W}$. Se realiza un giro en $-\omega$ alrededor del eje W , que define la siguiente matriz:

$$R_z(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

De esta forma, el eje $\vec{P}$ pasa a ocupar la línea de nodo, o nodo de línea (línea punteada en la figura 10). En este punto $\vec{Q}$, sigue perpendicular a $\vec{P}$ en el plano orbital, y $\vec{W}$ no se ha movido; ahora se realiza un giro en $-i$ para que el plano orbital quede sobre el plano X, Y , descrito de la siguiente manera:

$$R_x(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

En este punto, el eje sigue $\vec{P}$ en el nodo de línea, y $\vec{Q}$ perpendicular a éste sobre el plano fundamental; $\vec{W}$ toma la posición del eje Z . Finalmente, se realiza un giro sobre $Z = \vec{W}$ con un ángulo $-\Omega$, siendo la matriz correspondiente así:

$$R_z(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Con este último giro se logra que $\vec{P}$ coincida con X y $\vec{Q}$ con Y . Ahora, realizando el producto de las tres matrices de acuerdo con las expresiones (1.54), (1.55) y (1.56), se obtiene la matriz de cambio así:

$$M = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)$$

Ahora se aplica la matriz M a cada uno de los vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{W}$ para obtener el resultado en la base X, Y, Z , de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} P_X & Q_X & W_X \\ P_Y & Q_Y & W_Y \\ P_Z & Q_Z & W_Z \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{Q} &= \begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \\ Q_Z \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{W} &= \begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De estas operaciones matriciales, se obtienen los vectores finalmente así:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} +\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ +\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ +\sin \omega \sin i \end{bmatrix}_{X,Y,Z} \quad (1.58)$$

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ +\cos \omega \sin i \end{bmatrix}_{X,Y,Z} \quad (1.59)$$

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} +\sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ +\cos i \end{bmatrix}_{X,Y,Z} \quad (1.60)$$

Los tres vectores (1.58), (1.59) y (1.60), llamados gaussianos (Mue-ller, 1969), permiten definir en términos de elementos orbitales la orien-tación de la órbita del satélite en el espacio, de tal manera que una vez enunciados los vectores se puede determinar con claridad el cálculo de i, Ω, ω .

- Recta de ascenso o nodo de ascenso: como se observa en la figura 13, Ω es el ángulo que se forma entre el equinoccio de primavera y el punto en el que el satélite cruza el ecuador de sur a norte. En considera-ción de la expresión (1.18), se puede decir que:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{h}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{bmatrix}$$

Como h fue obtenida de la posición y la velocidad, se puede hacer la representación de h o de $\vec{W} = \mathbf{h}_{x,y,z}/|h|$, en función tanto de i , como de Ω :

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} +\sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ +\cos i \end{bmatrix}_{X,Y,Z} = \begin{bmatrix} h_x/h \\ h_y/h \\ h_z/h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +W_x \\ -W_y \\ +W_z \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

De esta manera, la inclinación y la ascensión recta del nodo se dan en la evaluación de la expresión (1.52) $\alpha = \arctan$, donde el cuadrante de α debe ser seleccionado de tal manera que la señal del dominador X sea igual a la condición vista en la expresión (1.53), así:

$$\begin{aligned} -90^\circ < \alpha < +90^\circ & \quad \text{para } x > 0 \\ +90^\circ < \alpha < +270^\circ & \quad \text{para } x < 0 \end{aligned}$$

Finalmente, se determina Ω en consideración a lo expuesto por Montenbruck y Gill (2012) como:

$$\Omega = \arctan \left[\frac{W_x}{-W_y} \right] \quad (1.62)$$

Inclinación: como se observa en la figura 13, i es el ángulo (inclinación) que se forma entre el plano orbital y el plano ecuatorial, en consideración a lo desarrollado en la expresión (1.62) (Montenbruck y Gill, 2012); i está dado de la siguiente manera:

$$i = \arctan \left(\frac{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{W_z} \right) \quad (1.63)$$

Argumento del perigeo: como se observa en la figura 13, ω es el ángulo que se forma entre el nodo de línea y la dirección del perigeo de

la expresión (1.54) y (1.57) resolviendo $\cos \omega$ y $\sin \omega$; de acuerdo con lo expuesto por Montenbruck y Gill 2012), se tiene que:

$$\bar{\omega} = \arctan \left[\frac{z}{-xW_y + yW_x} \right] - \arctan \left[\frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \right] \tag{1.64}$$

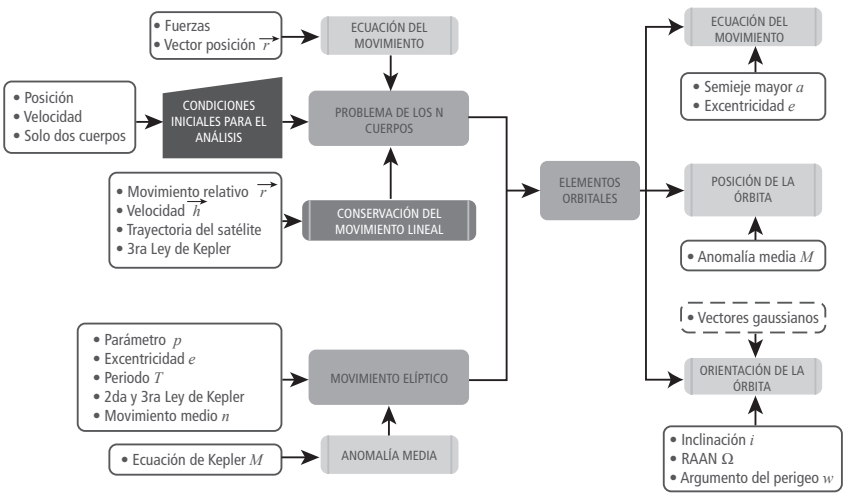
2.2. Métodos y herramientas

En este numeral se explica la metodología empleada en el cálculo de las órbitas; también se presenta la herramienta computacional aplicada en las simulaciones de los modelos de órbitas. Posteriormente, se menciona la manera en que se definieron la cobertura y los tiempos de vuelo para alcanzar una órbita geoestacionaria.

2.2.1. Metodología de diseño

La metodología propuesta se observa en la figura 14, en el diagrama de flujo aplicado en la obtención de las ecuaciones que describen las órbitas, sus formas y la posición del satélite en ellas.

Figura 14. Diagrama de flujo en el diseño de las órbitas

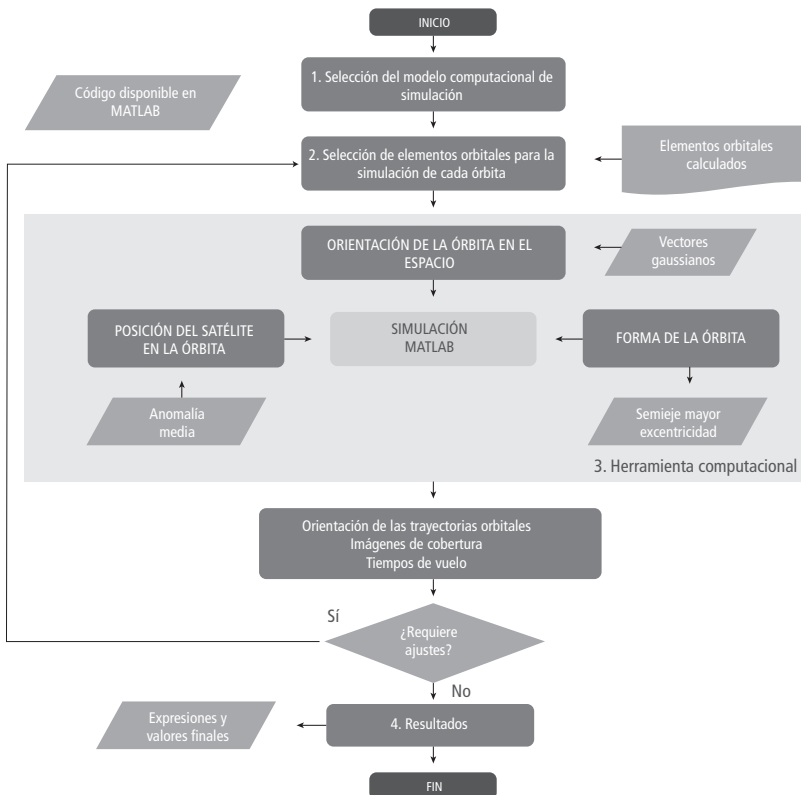


Fuente: Elaboración propia.

2.2.2. Herramienta computacional

La simulación de las órbitas de baja altura (LEO), de media altura (MEO/GTO), y la órbita geoestacionaria propuesta, permite observar de manera dinámica el movimiento que describe el satélite en cada una de ellas y la huella que describe sobre la superficie del planeta. Para la simulación se usó en el software MatLab Versión 7.10 de 2010, sobre el cual se usaron programas que simulan las trayectorias de las órbitas, a partir de los elementos orbitales calculados, así como el tiempo de cobertura sobre Colombia, el cual se calculó usando los periodos de rotación y velocidad del satélite respecto a la Tierra. En la figura 15 se observa el diagrama de flujo de la simulación.

Figura 15. Estructura de la simulación de las órbitas



Fuente: Elaboración propia.

2.3. Valores obtenidos

A continuación, se resumen los resultados analíticos y computacionales de las órbitas descritas. La metodología se basa en el diagrama de flujo presentado en la sección 2.2.1. Esta sección empieza en el diseño, simulación, cálculos de tiempo de vuelo y cobertura, para finalmente hacer la aproximación a los costos de una órbita geoestacionaria.

2.3.1. Variables calculadas

A continuación, se aplica el desarrollo matemático para el cálculo de los elementos orbitales vistos en el apartado 2.2.1, y sobre los cuales se sustentó el diseño de las órbitas.

2.3.1.1. Distancias del satélite. Las distancias entre el satélite y la Tierra se calculan en función de las órbitas que éste describirá desde su posición inicial en una órbita LEO, la transición que debe hacer a una órbita intermedia MEO/GTO, hasta que finalmente sea posicionado en una órbita GEO. Estas órbitas deben ser contempladas necesariamente, porque los costos de posicionamiento y operación de un satélite dependen de la órbita, o mejor, las órbitas que el satélite debe recorrer. El radio de la Tierra según el National Committee Of The International Union Of Geodesy And Geophysics (NCIGG, 2007) es de, por tanto, la órbita inicial LEO propuesta es circular, de 320 Km de altura h_{LEO} , o con un radio de 6.698,14 Km desde el centro de la Tierra como se puede observar en la figura 16.

$$h_{LEO} = 320 \text{ Km} \quad (1.65)$$

$$r_{LEO} = 6698,14 \text{ Km} \quad (1.66)$$

Figura 16. Órbita LEO

Fuente: Elaboración propia usando MatLab 2017.

En la parte izquierda de la figura 16 se observa la trayectoria descrita por la órbita, en color blanco, con una vista sobre Colombia. De acuerdo al Instituto Geográfico Nacional de España (2011), Colombia tiene paralelo sobre el ecuador, y su territorio tiene latitud norte en la frontera con Haití en coordenadas $16^{\circ}10'10''N$ y $79^{\circ}16'40''W$, hasta latitud sur en la frontera con Brasil en coordenadas $04^{\circ}13'36''S$ y $069^{\circ}56'37''W$; por tal razón, se escoge como inclinación mínima 16° , con el fin de garantizar el paso vertical del satélite sobre todo el territorio colombiano en la frontera norte y por ende, hasta latitud $16^{\circ}S$, lo que incluye todo el territorio nacional. En la parte derecha se tiene una vista sobre el polo norte de la órbita descrita.

La órbita de transición o MEO/GTO, es de forma elíptica y se propone que tenga en el perigeo una distancia $h_{perigeo}$ de la superficie de la Tierra igual a 320 kilómetros, igual a h_{LEO} donde se haría la transición, y en el apogeo h_{apogeo} igual a 35786 kilómetros de distancia de la superficie de la Tierra, lo cual se ajusta a lo recomendado por Erdner (2009), como puede evidenciarse en la figura 17, así:

$$h_{perigeo} = 320 \text{ Km} \quad (1.67)$$

$$h_{apogeo} = 35786 \text{ Km} \quad (1.68)$$

Figura 17. Órbita MEO/GTO

Fuente: Elaboración propia usando MatLab 2017.

En la parte izquierda de la figura 17 se observa la trayectoria descrita por la órbita en color blanco, con una vista desde el apogeo sobre Colombia, la cual tiene un ángulo de 16 grados de inclinación; en la parte derecha se tiene una vista sobre el polo norte, observando el apogeo sobre Colombia.

La última distancia por describir será de la órbita geoestacionaria, con radio r_{GEO} , en consideración de la expresión (1.66), y la distancia desde la superficie de la Tierra h_{GEO} ; en la figura 18 puede observar la trayectoria de dicha órbita:

$$r_{GEO} = 42164,140 \text{ Km} \quad (1.69)$$

$$h_{GEO} = 35786 \text{ Km} \quad (1.70)$$

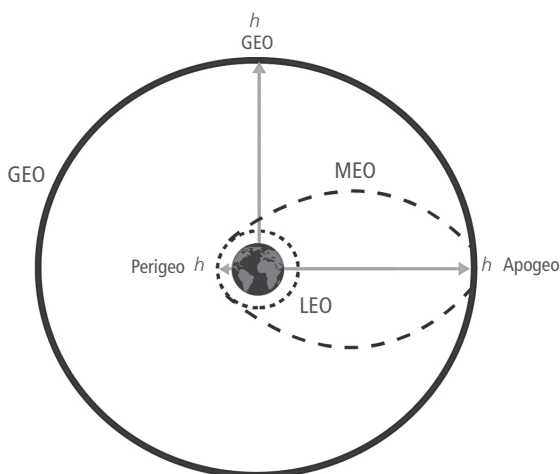
Figura 18. Órbita GEO



Fuente: Elaboración propia usando MatLab 2017.

En la parte izquierda de la figura 18 se observa la trayectoria descrita por la órbita, en color blanco, con una vista sobre Colombia, la cual tiene un ángulo de inclinación de 16 grados; en la parte derecha se tiene una vista sobre el polo norte. Las tres órbitas descritas respecto al planeta Tierra pueden observarse en la figura 19.

Figura 19. Trayectorias de las órbitas respecto a la Tierra.



Fuente: Elaboración propia.

2.3.1.2. Elementos Orbitales SGC. Fueron definidos para cada una de las tres órbitas propuestas, inicialmente tomando como referencia, lo planteado en el desarrollo de los elementos orbitales, respecto a la forma de la órbita, la posición del satélite en la órbita y la orientación de la órbita en el espacio.

2.3.1.2.1. En la órbita LEO. Para esta primera órbita baja se definen los siguientes elementos orbitales, con relación a ésta es circular, y su semieje mayor es igual al radio definido para ella, así:

- Semieje mayor: $a=320\text{Km de altura} + \text{radio de la tierra}$
 $a= 6698,14 \text{ Km}$ (1.71)

- Excentricidad (e): como se observó la excentricidad en el literal 2.1.2, en la forma de la órbita, se definió para las circunferencias (e) con un valor de (0) cero; en consecuencia, con la primera órbita baja o LEO, la órbita descrita es una circunferencia de 320 Km de altura y por tanto excentricidad cero.

$$e=0 \quad (1.72)$$

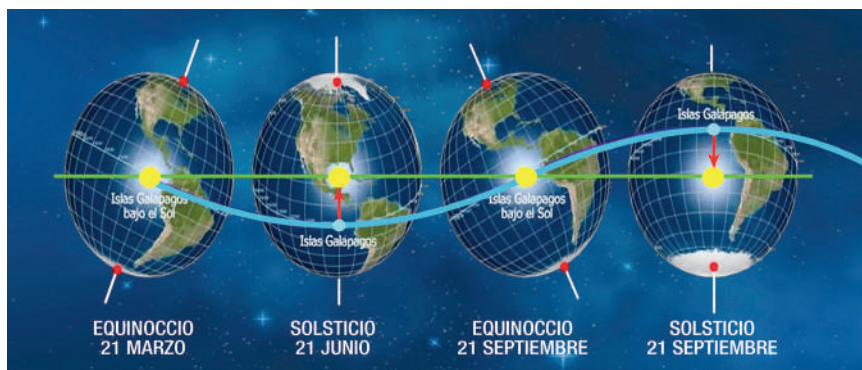
- Anomalía media (M): determina la posición inicial del cuerpo celeste; en este caso, el satélite alrededor de la Tierra, para esta órbita, tendrá un valor de 180° , en relación con la ubicación respecto al eje formado por el RAAN, siendo (180) en el perigeo donde se realiza el cambio a la órbita intermedia o MEO/GTO.

$$M=180^\circ \quad (1.73)$$

La recta de ascensión o el nodo de ascensión (RAAN) se calculó definiendo inicialmente la posición del equinoccio de primavera para la época actual (PijamSurf, 2011), es decir, el registrado el 21 de marzo de 2016 a las 04:30 horas del meridiano de Greenwich, 9:30 hora de Colombia, el cual, haciendo una proyección sobre la Tierra, sucedió exactamente sobre las Islas Galápagos en Ecuador, en el Meridiano W093,

de acuerdo a lo expuesto por Hoya (2016), y como se puede observar en la figura 20, así:

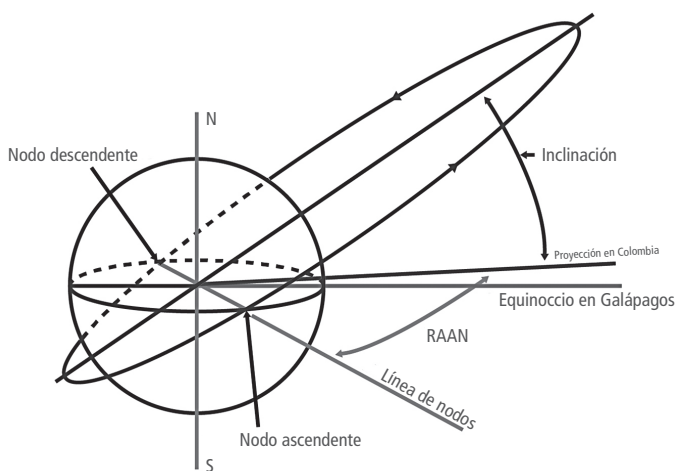
Figura 20. Solsticios y equinoccios



Fuente: Hoya (2016)

En consideración a la figura 20, se define un RAAN para que la ascensión de la órbita proyecte el semieje mayor sobre Suramérica, específicamente sobre territorio colombiano, como se muestra a continuación:

Figura 21. Ángulo RAAN y relación con el equinoccio



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 21 se puede observar de color rojo, la línea que proyecta el equinoccio sobre las Islas Galápagos, y perpendicular a la línea de nodos de color verde; de color azul se observa la línea o proyección del apogeo sobre el territorio colombiano, de tal forma que el ángulo RAAN se calculó desde la línea de color verde hasta la línea azul, o de proyección del apogeo sobre Colombia. El meridiano escogido sobre Colombia es el W75, es decir que, si desde la línea de nodos hasta la Islas Galápagos hay 90 grados, y desde la Islas Galápagos en el meridiano W93 hasta el meridiano W75 sobre Colombia hay 18 grados más, la distancia en grados desde el nodo de línea hasta la proyección sobre Colombia es 108°, y en consideración de la expresión (1.62) se observa que:

$$\begin{aligned}
 \text{RAAN} \quad \pi \leq \Omega \leq 2\pi \\
 93^\circ - 75^\circ = 18^\circ \\
 \Omega = 18^\circ + 90^\circ = 108^\circ \\
 \Omega = 108^\circ
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

• Inclinación (i): garantizando la cobertura sobre todo el territorio colombiano fue seleccionada una inclinación como se observa a continuación:

$$i=16^\circ \tag{1.75}$$

• Argumento del perigeo (ω): es el ángulo que se forma entre el nodo de línea y la dirección del perigeo; para este caso, el plano orbital (circunferencia) se proyecta sobre el nodo de línea y en el sentido del perigeo, como posición inicial del satélite, por lo cual el ángulo es cero (0°).

$$\cos(\omega) = \frac{n \cdot i}{n \cdot i} = 0^\circ \tag{1.76}$$

2.3.1.2.2. *En la órbita MEO/GTO.* Para esta órbita intermedia o de transición, se definen los siguientes elementos orbitales, teniendo como referencia la expresión (1.49):

- Semieje mayor:
$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$$
$$a = 24431.14 \text{ Km} \quad (1.77)$$

• Excentricidad: en el literal 2.1.2 sobre la forma de la órbita, se definió para las órbitas elípticas (e) con un valor comprendido entre $0 < e < 1$; en consecuencia, con la órbita elíptica o de transición MEO/GTO, con el perigeo y el apogeo descritos, y las expresiones (1.32) y (1.33), se obtiene que:

$$a = \frac{P}{1 + e^2}$$

$$e = \sqrt{1 - 0.4729} = 0,726$$

$$e = 0,726 \quad (1.78)$$

• Anomalía media (M): determina la posición inicial del cuerpo celeste; en este caso, para el satélite alrededor de la Tierra para esta órbita, se asume un valor inicial de 180° grados, que es el ángulo en el apogeo, donde la anomalía verdadera, excéntrica y media tienen el mismo valor, y que además es donde se realiza el cambio a la de transición a la órbita geoestacionaria, punto inicial seleccionado porque se proyecta sobre Suramérica, específicamente sobre Colombia.

$$M = 180^\circ \quad (1.79)$$

• RAAN: definido para esta órbita es igual que para la órbita LEO y GEO como se observa en la expresión (1.74).

$$\text{RAAN} \quad \pi \leq \Omega \leq 2\pi$$

$$\Omega = 108^\circ \quad (1.80)$$

• Inclinação (i): similar a la inclinación real de la Tierra como se definió en la expresión (1.75). De esta manera se mantiene el plano ecuatorial

$$i = 16^\circ \quad (1.81)$$

- Argumento del perigeo (ω): definido para esta órbita es igual que para la órbita LEO y GEO de acuerdo con la expresión (1.76), que es el punto máximo de apertura o distancia de la órbita sobre el territorio colombiano.

$$\cos(\omega) = \frac{n \cdot i}{n \cdot i} = 0^\circ \quad (1.82)$$

2.3.1.2.3. *En la órbita MEO/GTO.* Para esta última órbita, los elementos orbitales finalmente fueron definidos así:

- Semieje mayor: $a=42164,14 \text{ Km}$ (1.83)

- Excentricidad (e): como se observó la excentricidad en el literal 2.1.2, las órbitas y sus formas, se definió para las circunferencias (e) con un valor de (0) cero, en consecuencia con la órbita final geoestacionaria descrita con una altura de 36.000 km y de forma circular, la excentricidad es cero.

$$e=0 \quad (1.84)$$

- Anomalía media (M): al igual que la descrita en la órbita MEO/GTO y la expresión (4.15), se ha definido un valor de:

$$M=180^\circ \quad (1.85)$$

- RAAN: definido para esta órbita es igual que para la órbita LEO y MEO/GTO como se observa en la expresión (1.74) y (1.80).

$$\begin{aligned} \text{RAAN} \quad \pi \leq \Omega \leq 2\pi \\ \Omega = 108^\circ \end{aligned} \quad (1.86)$$

- **Inclinación (i):** para esta órbita es seleccionada de tal manera que siempre esté en el plano ecuatorial, logrando así su permanencia sobre el territorio colombiano en la posición seleccionada así:

$$i = 16^\circ \quad (1.87)$$

- **Argumento del perigeo (ω):** definido para esta órbita es igual que para la órbita LEO y MEO/GTO de acuerdo con las expresiones (1.76) y (1.82).

$$\cos(\omega) = \frac{n \cdot i}{n + i} = 0 \quad (1.88)$$

Considerando las expresiones (1.58), (1.59) y (1.60), los vectores que describen la forma de la órbita son:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,30901 \\ +0,95105 \\ 0 \end{bmatrix}_{x,y,z}$$

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,91421 \\ +0,91421 \\ +0,27563 \end{bmatrix}_{x,y,z}$$

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,26214 \\ +0,08517 \\ +0,96126 \end{bmatrix}_{x,y,z}$$

2.3.1.3. Velocidades y periodos. Se parte de definir la órbita geoestacionaria como aquella que respecto al plano ecuatorial terrestre mantiene con una excentricidad igual o muy cercana a cero, ya que su órbita es circular. De acuerdo con la ley de velocidad de Vis-Viva (Bodanis, 2001), se plantea para una órbita circular o elíptica que:

$$v_{Circular} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad (1.89)$$

$$a = r$$

El periodo de la órbita circular de la expresión (1.89) Goldstein (1980), estará determinado por:

$$T_{circular} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (1.90)$$

Las velocidades del perigeo y del apogeo serán las mismas, debido a que la excentricidad e es cero, como se puede observar en el siguiente análisis:

$$v_{perigeo} = \sqrt{\frac{GM}{a}} * \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (1.91)$$

$$v_{apogeo} = \sqrt{\frac{GM}{a}} * \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (1.92)$$

Ahora se define la velocidad de satelización o primera velocidad cósmica, la cual es la mínima que debe tener un objeto o cuerpo para que entre en órbita alrededor de la Tierra con la expresión (1.65), y despreciando el rozamiento del aire (Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2012).

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad (1.93)$$

Se llama a la segunda velocidad cósmica o velocidad de escape, a la velocidad mínima que se debe imprimir a un cuerpo para que abandone la órbita circular baja alrededor de la Tierra; se obtiene con la velocidad parabólica, ya que lo que se busca es que el cuerpo con esta segunda velocidad describa una elipse.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \quad (1.94)$$

Para que los cuerpos entren en órbita geoestacionaria, se deben lanzar en la dirección del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, lo cual desacelera el cuerpo colocándolo en dicha órbita. Que un cuerpo (en este caso un satélite), tenga órbita geoestacionaria, equivale a decir que la velocidad angular del satélite puesta en órbita circular sea igual que la de la Tierra ϖ .

$$\begin{aligned} v_{circ} &= \varpi * r \\ v_{circ}^2 &= \varpi^2 * r^2 \end{aligned}$$

Y sustituyendo:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{r} &= \varpi^2 * r^2 \\ GM &= \varpi^2 * r^3 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{GM}{\varpi^2}} \end{aligned} \tag{1.95}$$

Donde ϖ es la duración del día sidéreo en tiempo solar medio (Aoki y Kinoshita 1982; Senovilla, 2012), es decir 86.164 segundos; ahora, si H es la altura del satélite respecto a la superficie de la Tierra, y A el radio de la Tierra según expresión (1.66), se obtiene:

$$H=R-A \tag{1.96}$$

R=distancia total del satélite al centro de la tierra.

Finalmente, H es la altura en la que un satélite es denominado geo-síncrono o geoestacionario; esta altura H ha sido calculada en aproximadamente 35.776,9 Km (Erdner, 2009). En la tabla 1 se pueden observar los valores calculados de velocidades y periodos para las tres órbitas.

Tabla 1. Velocidades y periodos en las tres órbitas

Órbita	Velocidad	Periodo	Grados por minuto
LEO	$v_{circular} = 7,714 \text{ km/s}$	$T_{circular} = 5,46 \times 10^3 \text{ s} = 90,92 \text{ min}$	$3,95^\circ$
MEO/ GTO	$v_{apogeo} = 1,6093 \text{ km/s}$ $v_{perigeo} = 10,1379 \text{ km/s}$	$T = 38001,1 \text{ Segundos} = 633.35$	$158,33^\circ$
GEO	$v_{Geo} = 3,0746 \text{ km/s}$	$T_{Geo} = 23 \text{ Horas} + 56 \text{ minutos} + 4,0003 \text{ Segundos} \approx 1 \text{ día}$	0°

Fuente: Elaboración propia.

2.3.1.4. Expresiones finales del SGC. Las expresiones finales que representan los movimientos de las tres órbitas del SGC, iniciando con la órbita de satelización o LEO, pasando posteriormente a la órbita de transición o MEO/GTO, para finalmente llegar a la órbita geoestacionaria sobre Colombia, se pueden observar en la tabla 2.

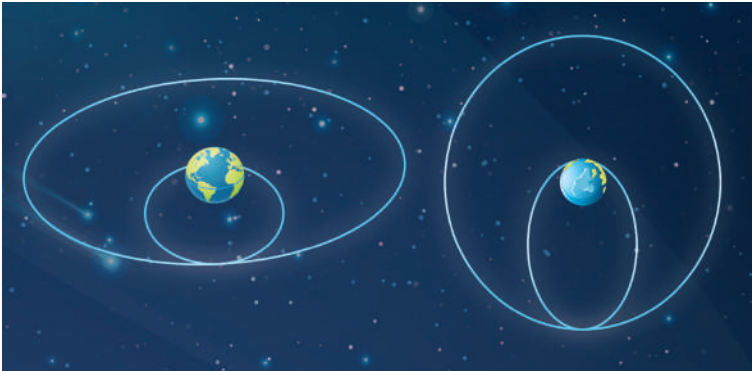
Tabla 2. Elementos orbitales por órbita

Elemento	Órbita	LEO	MEO/GTO	GEO
Semieje mayor	(<i>a</i>)	6698,14 Km	24431,14 Km	42164,14 Km
RAAN	(Ω)	108°	108°	108°
Argumento del perigeo	(ω)	90°	90°	90°
Inclinación	(<i>i</i>)	16°	16°	16°
Excentricidad	(<i>e</i>)	0	0,726	0
Anomalía media	(<i>M</i>)	180°	180°	180°

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 22 se pueden observar las trayectorias de las tres órbitas en color blanco respecto al planeta Tierra; asimismo, en el costado izquierdo con vista desde Colombia, y en el costado derecho con vista desde el polo norte.

Figura 22. Las tres órbitas



Fuente: Elaboración propia.

2.3.2. Simulación y análisis de la órbita

En este acápite se describe el programa utilizado y los cálculos obtenidos, tanto en tiempo de vuelo del satélite como los de cobertura y las huellas sobre el planeta Tierra. Para la simulación, se consideraron librerías y ejercicios publicados por MathLab Corporation (2014) y Jin, Jian, Quiao y Guo (2012), que con adaptación hecha por los autores lograron una simulación exitosa, utilizando las siguientes librerías de MatLab: Absolute Angular Acceleration; Convert Keplerian; Orbital Elements to a State Vector; Satélite Orbit Computation; Cowell's Method for Earth Satellites; Quaternions from Euler Angles, Euler Axis and Angle; The Circular-Restricted Three-Body Problem; Doppler Applications in LEO Satellite Communication Systems; y Orbital Periods of a Satellite.

Una vez tenido en cuenta el software disponible y lo descrito por De Orús, et al. (2007), se efectuaron las simulaciones de cada una de las órbitas y sus elementos orbitales calculados anteriormente, con lo que se aterriza el concepto de forma de la órbita, cobertura y periodos de una manera visual.

2.3.2.1. Cálculos de energía. El cálculo de energía en cada una de las órbitas permite conocer cuánta se debe imprimir en el satélite para lograr el cambio y/o transición del mismo entre las órbitas hasta su posicionamiento final. Además, entre más energía requiera un satélite para su posicionamiento y control, mayor será el consumo de combustible para realizar cambios de velocidad. La energía se describe por las siguientes ecuaciones:

$$E_{Cinetica} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.97)$$

$$E_{Potencial} = \frac{GM}{r} \quad (1.98)$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM}{r} \quad (1.99)$$

Los cálculos descritos en la tabla 3, se realizaron con las velocidades calculadas para cada órbita en la tabla 1.

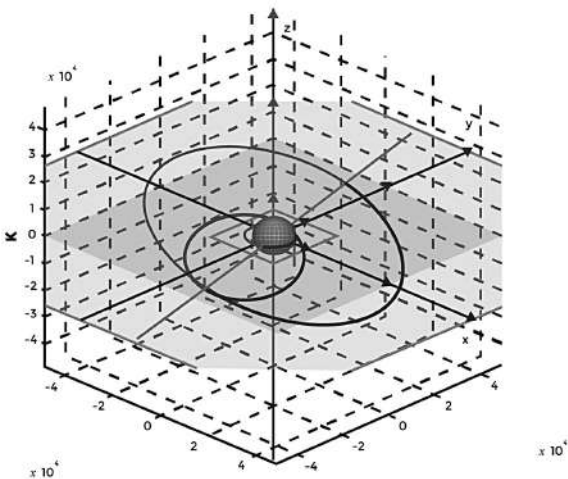
Tabla 3. Energía en las tres órbitas

Órbita	Energía cinética	Energía potencial	Energía total
LEO	$1,49 \times 10^9 \text{ J}$	$59,6 \times 10^6 \text{ J}$	$1,5496 \text{ J}$
MEO/ GTO	$E_{perigeo} = 2,57 \times 10^9 \text{ J}$	$E_{perigeo} = 59,6 \times 10^6 \text{ J}$	$E_{perigeo} = 2,629 \times 10^9 \text{ J}$
	$E_{apogeo} = 64,7 \times 10^6 \text{ J}$	$E_{apogeo} = 9,453 \times 10^6 \text{ J}$	$E_{apogeo} = 74,15 \times 10^6 \text{ J}$
GEO	$236 \times 10^6 \text{ J}$	$9,45 \times 10^6 \text{ J}$	$246 \times 10^6 \text{ J}$

Fuente: Elaboración propia.

2.3.2.2. Tiempo de vuelo “T.O.F.”. El tiempo de vuelo del satélite T.O.F (Widnal y Peraire, 2008), está descrito por los tiempos mínimos que se requieren, para que una vez puesto en la órbita LEO, realice el vuelo por la órbita MEO/GTO o de transferencia, también conocida como la órbita de transferencia de Hohmann (Baruh, 1999), hasta su posición final en la órbita geoestacionaria sobre Colombia.

Figura 23. Trayectorias descritas por las tres órbitas



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 23 se observan las trayectorias de las tres órbitas, con relación a los elementos orbitales descritos, siendo la línea verde la recta o nodo de ascensión RAAN, y el círculo rojo, la posición inicial del satélite. Inicialmente, se calculó el Δv_1 , que representa el cambio de velocidad de la órbita LEO u órbita baja, a la órbita de transición u órbita media MEO/GTO, como se observa en la figura 24; para ello se utilizaron los valores descritos en la tabla 1 de la siguiente manera:

Figura 24. Cambios de Velocidad para intercambiar de Órbita

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= |v_{perigeo} - v_{Circular}| = |10,1379 \text{ Km/s} - 7,714 \text{ Km/s}| \\ \Delta v_1 &= 2,4239 \text{ Km/s}\end{aligned}\tag{1.100}$$

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, se calculó el Δv_2 , el cual constituye el cambio de velocidad en el satélite para que abandone la órbita de transferencia o media MEO/GTO y se poseione en la órbita final deseada o geoestacionaria GEO, para lo cual se utilizaron los valores descritos en la tabla 1, así:

$$\begin{aligned}\Delta v_2 &= |v_{Geo} - v_{apogeo}| = |3,0746 \text{ Km/s} - 1,6093 \text{ Km/s}| \\ \Delta v_2 &= 1,4653 \text{ Km/s}\end{aligned}\tag{1.101}$$

También se calculó el cambio de energía que se debe imprimir al satélite para lograr el cambio de órbita, usando los valores descritos en la tabla 3, siendo ΔE_1 la energía requerida para pasar de la órbita LEO a la órbita MEO/GTO, y ΔE_2 la energía requerida para pasar de la órbita MEO/GTO la Órbita GEO respectivamente.

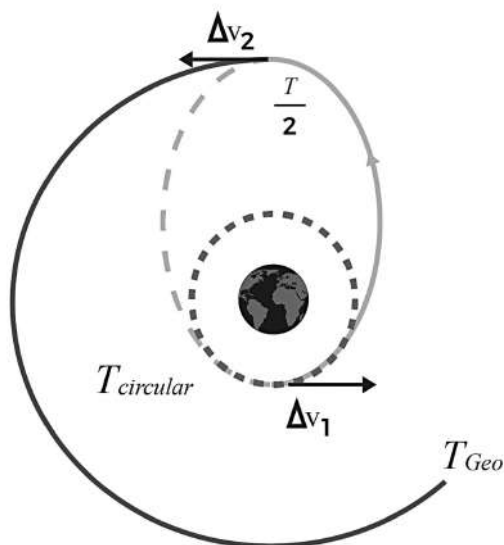
$$\begin{aligned}E_{LEO} &= 1,5496 \text{ J} \\ E_{total\ apogeo} &= 74,153 \times 10^6 \text{ J} \\ E_{total\ perigeo} &= 2,629 \times 10^9 \text{ J} \\ E_{GEO} &= 246 \times 10^6 \text{ J}\end{aligned}$$

$$\Delta E_1 = 74,153 \times 10^6 J - 1,5496 J = 74,1529 \times 10^6 J \quad (1.102)$$

$$\Delta E_2 = 2,629 \times 10^9 J - 246 \times 10^6 J = 2,3830 \times 10^9 J \quad (1.103)$$

Una vez calculadas las variaciones de velocidad y energía, se estimaron los tiempos de acuerdo con los periodos, para conocer el instante exacto sobre el cual se realizan los cambios de velocidad y de esa manera pasar el satélite de una órbita a otra conservando los parámetros definidos como son los elementos orbitales y la distancia.

Figura 25. Periodos y cambios de órbita



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 25 se observa en color amarillo la trayectoria de la órbita MEO/GTO, en azul la órbita LEO, y en color rojo la órbita geoestacionaria final o GEO. Para calcular el tiempo, se usaron las expresiones (1.90) y (1.92), así:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$$T.O.F = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{(24430 \text{ Km})^3}{398600,4405 \text{ Km}^3/\text{s}^2}} = 19000,550592627 \text{ segundos}$$

$$T.O.F = 19000,550592627 \text{ segundos} \approx 316.6758 \text{ minutos} \approx 5,2779 \text{ Horas}$$

Finalmente, el tiempo de vuelo del satélite sobre la órbita MEO/GTO hasta alcanzar el punto de transferencia a la órbita GEO está dado por:

$$T.O.F = 5 \text{ horas} + 16 \text{ minutos} + 40,55 \text{ segundos} \quad (1.104)$$

En la tabla 4 se ven de manera resumida los cálculos del T.O.F. tiempo de vuelo, hasta la órbita GEO.

Tabla 4. T.O.F. Tiempos de vuelo en la órbita de transferencia

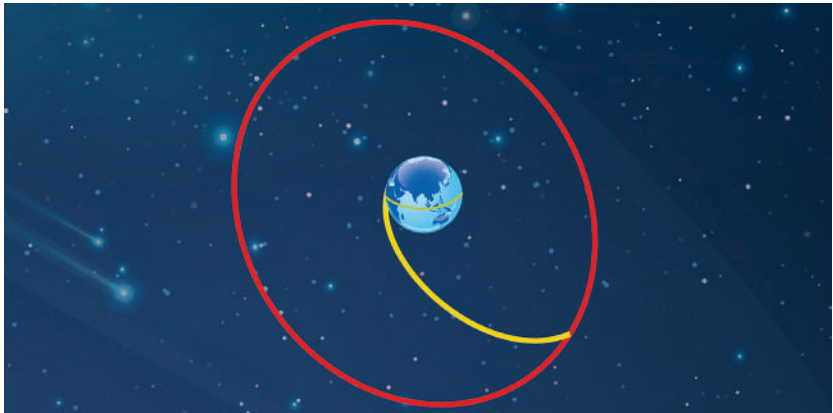
Δv_1	2,4239 Km/s
Δv_2	1,4653 Km/s
Δv_{total}	3,8892 Km/s
ΔE_1	74,1529x 10 ⁶ J
ΔE_2	2,3830x 10 ⁹ J
T.O.F	5 horas, 16 min, 40,55 seg

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 26 se puede observar en el software STK, las trayectorias de las órbitas de transferencia de Hohmann²⁴.

24 En la astronáutica e ingeniería aeroespacial, la órbita de transferencia de Hohmann es una maniobra orbital que, bajo las hipótesis comunes de la astrodinámica, traslada a una nave espacial desde una órbita circular a otra utilizando dos impulsos de su motor. Como se observa en la figura 23, la órbita de transferencia de Hohmann es una mitad de una órbita elíptica que toca tanto la órbita inicial que se desea dejar (en verde), y la órbita final que se quiere alcanzar (en rojo). Por ende, la órbita de transferencia (en amarillo), se inicia disparando el motor de la nave espacial para acelerarla creando una órbita elíptica; esto añade energía a la órbita de la nave espacial. Cuando la nave alcanza la órbita final, su velocidad orbital debe ser incrementada de nuevo para hacer una nueva órbita circular.

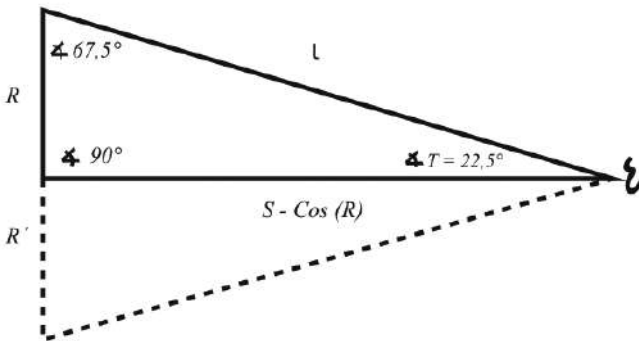
Figura 26. Transferencia de órbitas (STK software)



Fuente: Elaboración propia usando software STK.

2.3.2.3. Cobertura del satélite. El cómputo de la zona de cobertura del satélite se efectuó para cada órbita (LEO-MEO/GTO y finalmente la órbita deseada GEO), por la línea de vista sobre un área encima de la superficie del planeta. Se logró aplicando la geometría de la perspectiva polar (Poveda, 2016), es decir, el alcance visual del satélite está relacionado directamente con su altura sobre la superficie del planeta. Lo anterior puede observarse de manera básica en la figura 27, como lo propone Ostrander (1970):

Figura 27. Geometría de la perspectiva polar



Fuente: Ostrander (1970)

En la figura 27 se observan la variable T , que es el ángulo que relaciona la línea de vista del observador y el arco que forma R o el radio de la Tierra, y que una vez calculado se usa para relacionar el meridiano máximo sobre el cual el observador tendrá línea de vista. También está s , que es la distancia desde el observador y el centro de la Tierra y, por último, esta l , que es la distancia sobre horizonte, vista desde el observador. Para este caso en particular, el observador es el SGC durante su vuelo desde la órbita LEO hasta la órbita GEO. De acuerdo con lo enunciado por Ostrander (1970), el arco R estará limitado por $R \leq \sin^{-1}\left(\frac{1}{S}\right)$; con los planteamientos anteriores, T está definido de la siguiente manera:

$$\tan(T) = \frac{\sin(R)}{S - \cos(R)}$$

$$T = \tan^{-1} \left[\frac{\sin(R)}{S - \cos(R)} \right] \quad (1.105)$$

Se calculan las distancias considerando las expresiones (1.66) y (1.68):

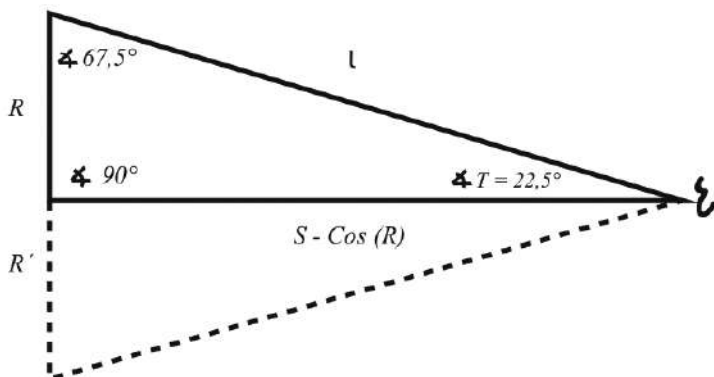
$$\begin{aligned} \cos(45) * (6378,14) &= 4510,026Km \\ 4510,026Km + (S - \cos(R)) &= 6698,14Km \text{ Órbita LEO} \\ S - \cos(R) &= 2188,114Km \text{ En LEO} \end{aligned} \quad (1.106)$$

En el perigeo de la órbita MEO/GTO es similar que el de la órbita LEO, debido a que tienen el mismo radio desde la Tierra.

$$\begin{aligned} 4510,026Km + (S - \cos(R)) &= 42164,14Km \text{ En Apogeo MEO/GTO} \\ S - \cos(R) &= 37653,988Km \text{ En Apogeo MEO/GTO} \end{aligned} \quad (1.107)$$

En GEO es similar que en el apogeo de la órbita MEO/GTO, dado que tienen el mismo radio desde la Tierra.

Aplicando el teorema de los senos y, considerando un  $T=22,5^\circ$ (un ángulo de 45° total de la figura 25), se puede deducir el área de cobertura así:

Figura 28. Línea de vista

Fuente: Elaboración propia.

$$\frac{S - \cos(R)}{\sin(67,5)} = \frac{R}{\sin(22,5)} \quad \text{se despeja } R \quad (1.108)$$

Conociendo R, se realizan los cálculos de cobertura para cada una de las órbitas como se expone a continuación:

2.3.2.3.1. *Cobertura en la órbita LEO.* Se hacen los cálculos de línea de vista máxima, aplicando las expresiones (1.66), (1.67), (1.106) y (1.108), de la siguiente manera:

$$\frac{2188,114Km}{\sin(67,5)} = \frac{R}{\sin(22,5)} \Rightarrow R = 956,3464Km$$

$$R + R' = 956,3464Km * 2 = 1912,6929896Km$$

$$1912,6929896Km = 1032,7715 Nmi$$

Este valor se convirtió en Millas Náuticas (), con el fin de averiguar cuántos meridianos tanto al este como al oeste, y cuántos paralelos al norte y al sur es el área aproximada de cobertura visual del satélite; además, la distancia entre paralelos es de 1° entre cada uno; un grado es equivalente a 60 millas náuticas de distancia²⁵. Por tanto, la cantidad

25 Para los meridianos, la distancia se evalúa diferente si es en la línea ecuatorial o en los polos, debido

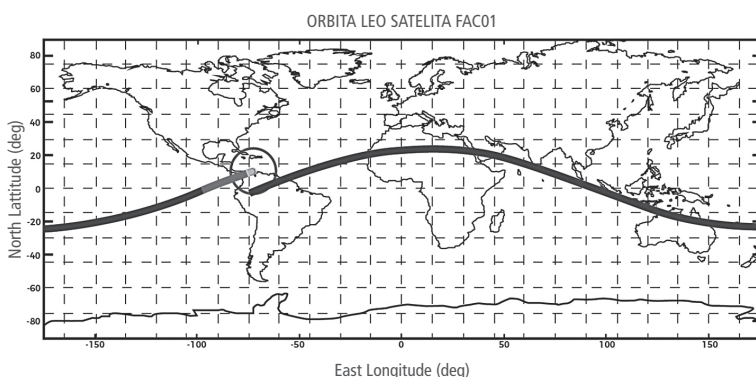
aproximada de paralelos y de meridianos de la posición de huella inicial del satélite definida como N 00° 00' 00" W 75° 00' 00", será:

$$\text{Paralelos y Meridianos} = \frac{1032,7715 \text{ Nmi}}{60 \text{ Nmi}} = 17,21 \Rightarrow 18 \quad (1.109)$$

De acuerdo con la expresión (1.109), se aproxima a 18 el número de paralelos, para manejar un número que permita dividir de manera proporcional y entera los meridianos y paralelos alrededor del punto central de la huella del satélite. Siendo 18 los paralelos totales del alcance visual, se distribuyen entonces nueve de las coordenadas iniciales al norte y nueve paralelos al sur, hasta N 09° y S 09°; de igual manera con los meridianos sobre el eje ecuatorial, serán nueve meridianos al este y nueve al oeste, hasta W 84° y W 66°.

Simulado en Matlab las expresiones (1.62), (1.63) y (1.109), se obtiene la proyección de la órbita y su cobertura sobre la superficie terrestre (figura 29). Considerando la rotación de la Tierra, el punto de color amarillo es la proyección exacta del satélite sobre la superficie terrestre, y el círculo alrededor de éste, el área del alcance de vista sobre el horizonte de acuerdo con la expresión (1.106).

Figura 29. Cobertura órbita inicial (LEO) SGC



Fuente: Elaboración propia usando Software MatLab.

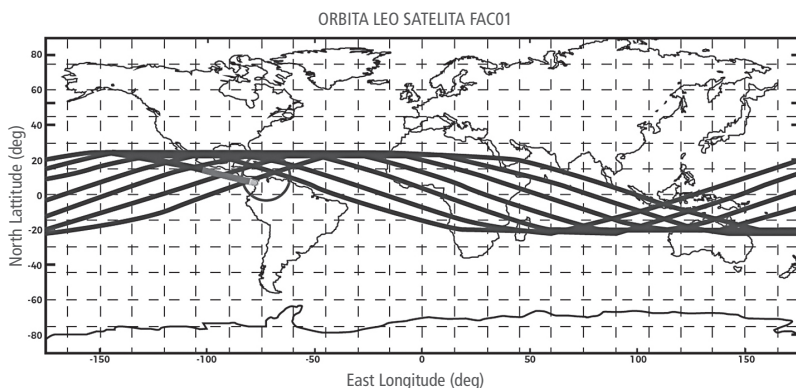
a la convergencia que tienen éstos en los dos polos. Para el caso de estudio del presente capítulo, y por tratarse de cálculos sobre la línea ecuatorial, la distancia entre meridianos es aproximadamente de 60 millas náuticas.

En la figura 29 se observa una discontinuidad en la trayectoria del satélite sobre Colombia, por efecto del movimiento de rotación de la Tierra. Con base en las expresiones (1.109) y los valores descritos en la tabla 1, el satélite en este caso tendrá un tiempo de cobertura sobre Colombia así:

$$\frac{18^\circ}{3,9592^\circ/\text{min}} = 4,5463 \text{ min}$$

El tiempo de cobertura es de 4,5463 min en la órbita inicial, nuevamente el satélite tendrá cobertura sobre Colombia en la órbita número 7, lo cual tardará 10 horas 36 minutos y 29 segundos; dichas órbitas se pueden observar en la figura 30.

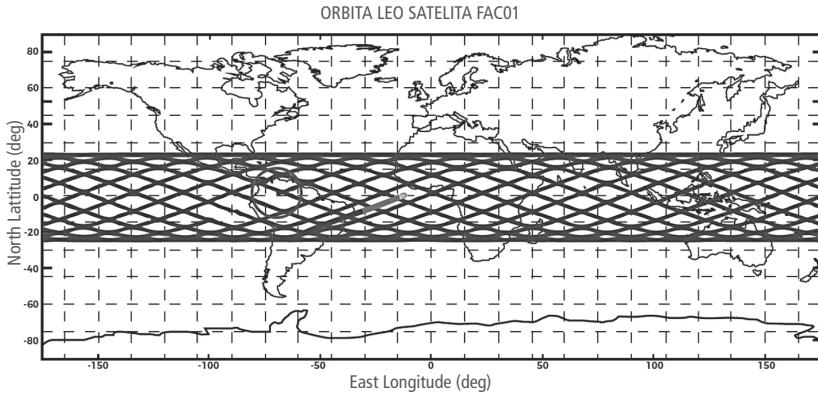
Figura 30. Cobertura órbita No 7 (LEO) SGC



Fuente: Elaboración propia usando Software MatLab.

Por último, en esta órbita baja LEO, y los periodos descritos en la expresión (1.70), se tiene que el satélite pasa por su posición inicial cada 15 órbitas, tomándole un tiempo de 22 horas 43 minutos y 54 segundos, como se puede observar en la figura 31.

Figura 31. Cobertura órbita No 15 (LEO) SGC



Fuente: Elaboración propia usando Software MatLab.

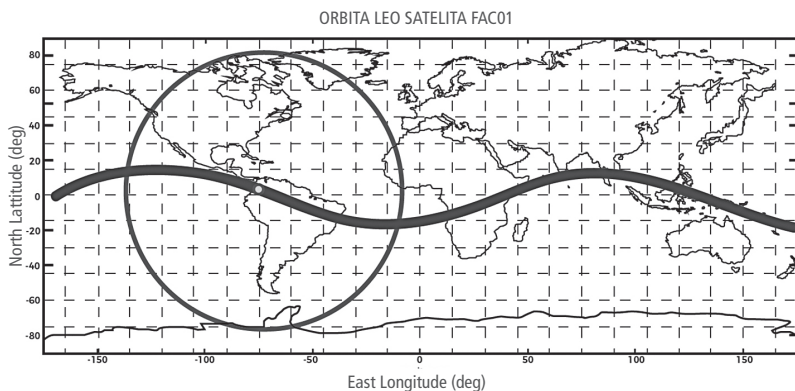
2.3.2.3.2. Cobertura en la órbita MEO/GTO. Se hacen los cálculos aplicando las expresiones (1.66), (1.67), (1.106) (1.107) y (1.108) para el apogeo y perigeo; puntualmente, en el perigeo, los cálculos de cobertura son exactamente los mismos que en la órbita LEO, en vista de que tienen el mismo radio.

Siendo 18 los paralelos totales del alcance visual distribuidos así: nueve de las coordenadas iniciales al norte y nueve paralelos al sur, hasta N 09° y S 09°. De igual manera con los meridianos sobre el eje ecuatorial, serán nueve meridianos al este y nueve al oeste, desde W 84° a W 66°

En el apogeo la cobertura cambia en razón a la distancia del satélite respecto al centro de la Tierra así:

$$\begin{aligned}
 S - \cos(R) &= 37653,988Km \\
 \frac{37653,988Km}{\sin(67,5)} &= \frac{R}{\sin(22,5)} \Rightarrow R = 15596,7925Km \\
 R + R' &= 15596,7925Km * 2 = 31193,5850Km \\
 31193,5850Km &= 16843,1884 Nmi
 \end{aligned}
 \tag{1.110}$$

El valor descrito en (1.110) es muy superior al valor del radio de la Tierra, por lo cual la cobertura del satélite es de toda la cara del planeta expuesta a él cuando se encuentra en el apogeo; se puede observar la huella por la línea de vista sobre la superficie terrestre en la figura 32.

Figura 32. Cobertura desde el apogeo órbita MEO/GTO SGC

Fuente: Elaboración propia usando Software MatLab.

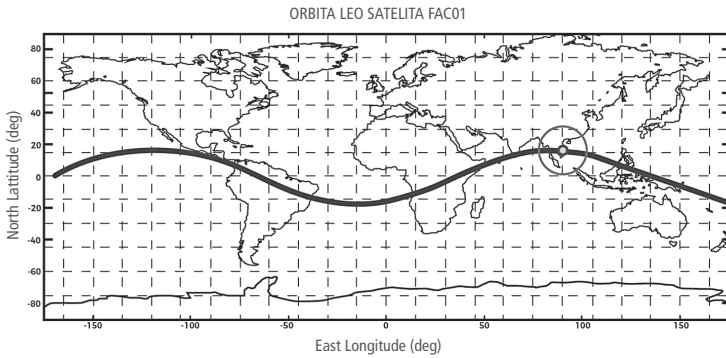
En la figura 32 se ha demarcado con un círculo, el área de cobertura en el apogeo de la órbita, mientras que el punto claro representa la proyección del satélite sobre la superficie de la Tierra y la línea que atraviesa el mapa muestra la trayectoria que describe el satélite en la primera rotación sobre el planeta. Considerando los periodos descritos en la tabla 1, se puede inferir que el satélite pasará dos veces al día sobre territorio colombiano; la velocidad en el perigeo determina el tiempo que estará en el costado opuesto del planeta, con relación a la posición geográfica de Colombia, de tal manera que el tiempo de recorrido de los 180° antes de salir en el horizonte será:

$$\frac{180^\circ}{3,9592^\circ/\text{minuto}} = 45,46 \text{ minutos}$$

El recorrido total de la órbita describe una trayectoria como la que puede observarse en la figura 33. Este tiempo es usado ahora para restar al periodo total de la órbita MEO/GTO, con lo cual se obtiene el tiempo de exposición sobre Colombia así:

$$\begin{aligned} 633,351690 \text{ min} - 45,46 \text{ min} &= 587,8879 \text{ min} \\ 587,8879 \text{ min} &= 9 \text{ horas} + 47 \text{ min} + 53 \text{ seg} \\ \text{Tiempo de Coertura MEO} &= 9 \text{ horas} + 47 \text{ min} + 53 \text{ seg} \end{aligned}$$

Figura 33. Cobertura desde el perigeo órbita MEO/GTO SGC

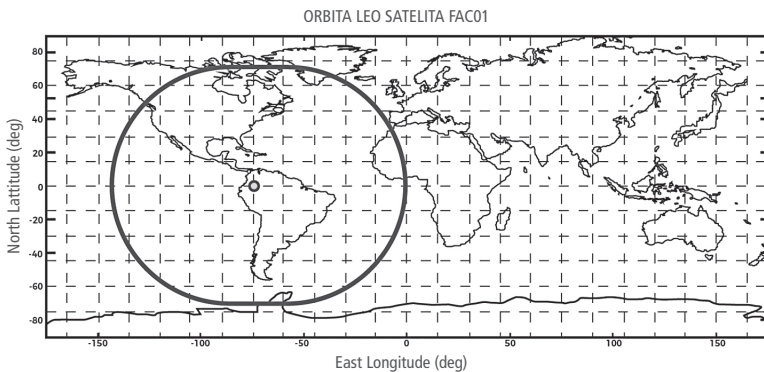


Fuente: Elaboración propia usando Software MatLab.

En la figura 33, la línea curva representa la trayectoria que describe el satélite en la primera rotación sobre el planeta; el círculo, la cobertura del satélite en el perigeo, mientras que el punto en la mitad de este, muestra la proyección del satélite sobre la superficie terrestre.

2.3.2.3.3 Cobertura en la órbita GEO. La cobertura del satélite en la órbita geoestacionaria sobre Colombia es relativamente fija, ya que los periodos de la rotación del día sideral de la Tierra tienen una duración de, y el periodo de rotación del satélite, según la tabla 1, es prácticamente igual, permitiendo que el satélite esté siempre en cobertura sobre Colombia, como se puede observar en la figura 34.

Figura 34. Cobertura órbita GEO SGC



Fuente: Elaboración propia usando Software MatLab

2.3.3. *Análisis de costos*

El análisis de costos de la puesta en órbita del SGC, se realizó a partir de la integración de las siguientes variables:

- Centros espaciales de lanzamiento y vehículos espaciales disponibles por centro.
- Vehículos espaciales lanzados durante el año 2018, masa de carga útil transportada y costo promedio por kilogramo para órbitas LEO y de transferencia; en este caso órbita MEO/GTO.
- Microsatélites con características de masa similares a las del FAC-SAT01 que han sido lanzados, y el tipo de vehículo espacial que realizó el lanzamiento.
- Costos promedio de lanzamiento para un microsatélite con características de masa similar al del SGC en órbitas LEO, MEO/GTO o de transferencia y, el vehículo que realizó el lanzamiento con precios promedio de 2018.

Otros costos que de manera directa e indirecta pueden influir en el costo del kilogramo puesto en el espacio, según el vehículo espacial utilizado, están dados por aspectos como los relacionados a continuación así:

1. Costos directos

- El costo en la producción de los vehículos espaciales.
- Costos operacionales:
 - Propulsores y materiales de consumo como combustibles, etc.
 - Operaciones de tierra, vuelo y misión de planificación.
 - Transporte del vehículo a su lanzador, recuperación y rehabilitación del vehículo recuperado después del lanzamiento.
 - Pago de seguros a daños en construcciones públicas o privadas.

2. Costos indirectos

- Administración del programa y de la gestión del sistema.
- Soporte técnico de los sistemas y mantenimiento de la estación de lanzamiento.

- Pago de seguros para el vehículo espacial y la carga útil: dependen en gran parte de la fiabilidad del vehículo espacial y el constructor de la carga útil.
- Costos de transporte específicos (costo por kg. de carga útil); dependen mucho del tamaño y la masa de la carga útil.
- Frecuencia de lanzamientos (vida útil de la carga puesta en el espacio y si utiliza siempre el mismo operador para los lanzamientos).
- Parámetros de la órbita.
- Situación competitiva (oferta/demanda) del mercado de lanzamiento mundial.
- Número de vehículos espaciales comprados y lanzamientos: entre mayor sea el número de éstos, los costos serán inferiores.

2.3.3.1. Centros espaciales de lanzamiento. La ubicación sobre el globo terráqueo es indispensable para el cálculo de trayectorias y costos, ya que entre más cerca se está de la línea del ecuador, es mayor la velocidad de rotación de la Tierra; por ende, es menor la velocidad que debe desarrollar el vehículo espacial para salir de la atmósfera terrestre. En contraste, cuando el satélite a ubicar requiere una órbita polar, será más conveniente el lanzamiento desde una posición cercana a los polos. En la figura 35 se pueden observar los principales centros espaciales desde donde se pueden poner en órbita satélites como el SGC, ya que existen otras bases de lanzamiento alrededor del mundo, pero sin registros en los últimos dos años de lanzamiento de cargas útiles.

Figura 35. Estaciones espaciales con lanzamientos en 2018



Fuente: Elaboración propia sobre mapa de Google Maps.

Las estaciones espaciales o centros espaciales más importantes en términos de actividad y lanzamientos durante el año 2018 (Federal Aviation Administration, 2018), fueron los siguientes (figura 32): Kennedy Centro Especial, Base Aérea Vandenberg, Base Naval Wallops Pacific Missile Range, Centro Espacial Tyuratam Baikonur, Centro Espacial Plesetsk, Centro Espacial Svobodniy, Centro Espacial Jiuquan Shanghai'engtsu, Centro Espacial Xichang, Centro Espacial Europeo Guayana, Centro Espacial Kagoshima, Centro Espacial Tanegashima y Centro Espacial Sriharikota.

2.3.3.1.1. *Estados Unidos*. Los centros espaciales de los Estados Unidos de América cumplen múltiples funciones de lanzamiento de misiles balísticos y de cohetes con fines de posicionamiento de cargas útiles de diferentes finalidades y distancias en el espacio (Range Commanders Council-Telemetric Group, 2008), bien sea alrededor de la Tierra, la Luna y otros cuerpos celestes.

Los vehículos espaciales lanzados por Estados Unidos durante 2018 (Federal Aviation Administration, 2018), pueden observarse en la tabla 5, donde éstos se describen, además de las estaciones o centros espaciales desde donde fueron lanzados en Estados Unidos (Marín, 2019), así como su confiabilidad en el cumplimiento de su misión y la masa de las cargas útiles puestas en cada órbita.

Tabla 5. Vehículos espaciales estadounidenses y lanzamientos en 2018

VEHÍCULO ESPACIAL		Delta II	2	100 %	1999	CCAFS, VAFB	2.703 (5.958)	0	0
		Delta IV Medium	1	100 %	2002	CCAFS, VAFB	12.240 (26.980)	6.267 (13.817)	
		Delta IV Heavy	3	100 %	2004	CCAFS, VAFB	22.560 (49.740)	14.420 (31.791)	
		Atlas V 401	3	100 %	2002	CCAFS, VAFB	9.797 (21.598)	4.750 (10.470)	
		Atlas V 541	4	100 %	2011	CCAFS, VAFB	17.443 (38.476)	8.290 (18.270)	
		Antares 120	2	100 %	2013	MARS	4.900 (10.780)	0	
		Falcon 9	22	100 %	2013	CCAFS, VAFB	13.150 (28.991)	4.850 (10.692)	
		Falcon 9 (Dragon)	5	100 %	2010	CCAFS	9.000 (19.842)	0	
		Falcon Heavy	3	100 %	2017	CCAFS, VAFB	63.800 (140.660)	26.700 (58.860)	
		Pegasus	1	100 %	1990	CCAFS	450(992)	0	
		Electron	1	100 %	2017	PSCA Mahla	150 (331)	0	
		Minotauro	1	100 %	1994	CCAFS, VAFB, MARS, PSCA	1.458 (3.214)	0	
Total de lanzamientos en el 2018									
Contabilidad en el 2018									
Año del primer lanzamiento									
Sitio del lanzamiento									
kg (lbs) puesto en órbitas LEO									
kg (lbs) puesto en órbitas Geo									

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.1.2. *Federación de Rusia.* Durante 2018, la Federación de Rusia realizó el lanzamiento al espacio de los vehículos Soyuz, Protón, Zenit y Rockot (MARÍN, 2019).

En la tabla 6 se pueden observar dichos vehículos espaciales y las estaciones desde fueron lanzados los cohetes rusos durante 2018 (Federal Aviation Administration, 2018); asimismo, su confiabilidad en el cumplimiento de su misión y la masa de cargas útiles puestas en órbita.

Tabla 6. Vehículos espaciales rusos y lanzamientos en 2018

VEHÍCULO ESPACIAL				
	Rockot	Soyuz 2	Proton M	Zenit 3SL
Total de lanzamientos en el 2018	4	22	6	1
Confiabilidad en el 2018	100 %	100 %	88 %	100 %
Año del primer lanzamiento	1994	2004	2001	1999
Sitio del lanzamiento	Baikonur, Plesetsk	Baikonur, Plesetsk	Baikonur	Baikonur
kg (lbs) puesto en órbitas LEO	2,150 (4,740)	4,850 (10,692)	23,000 (50,706)	0
kg (lbs) puesto en órbitas GEO	0	1,700 (3,800)	6,920 (15,256)	6,160 (13,580)

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.1.3. *China.* Las políticas de China con respecto al uso de las estaciones de lanzamiento, están profundamente ligadas a las relaciones internacionales con sus aliados. En este país existen dos centros espaciales capaces de posicionar cargas útiles en diferentes órbitas: Jiuquan Shanghai’engtsu (China Daily Mail, 2014), y Xichang (Capcom Espace, 2010).

Desde estos centros espaciales se lanzaron ocho vehículos durante 2018 (Marín, 2019). En la tabla 7 se pueden observar los vehículos espaciales y las estaciones desde fueron lanzados los cohetes chinos (Federal Aviation Administration, 2018); asimismo, la confiabilidad de éstos en el cumplimiento de su misión y la masa de las cargas útiles puestas en órbita.

Tabla 7. Vehículos espaciales chinos y lanzamientos en 2018

VEHÍCULO ESPACIAL				
	Long March 2C	Long March 2D	Long March 3A	Long 3B/C
Total de lanzamientos en el 2018	5	3	5	4
Confiabilidad en el 2018	100 %	100 %	100 %	100 %
Año del primer lanzamiento	1975	1992	1994	2008
Sitio del lanzamiento	Jiuquan, Tai-yuan, Xichang	Jiuquan	Xichang	Xichang
kg (lbs) puesto en órbitas LEO	3,850 (8,488)	1,300 (2,866)	0	0
kg (lbs) puesto en órbitas GEO	1,250 (2,756)	0	2,600 (5,732)	3,800 (8,3778)

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.1.4. *Europa en la Guayana.* El centro espacial de Kourou, también conocido como Centro Espacial Guayanés CSG (Franceinfo, 2014), se encuentra muy cerca de la línea del ecuador, lo cual facilita el lanzamiento y puesta en órbita de satélites geoestacionarios en relación a la velocidad de rotación de la Tierra en este punto geográfico del planeta. Desde este centro se lanzan vehículos espaciales como el Soyuz, Ariane y Vega (Marín, 2019).

En la tabla 8 se pueden observar los vehículos espaciales europeos que fueron lanzados durante el año 2018, desde la Estación Espacial de

la Guayana Francesa (Federal Aviation Administration, 2018); asimismo, la confiabilidad de éstos en el cumplimiento de su misión y la masa de las cargas útiles puestas en órbita.

Tabla 8. Vehículos espaciales europeos y lanzamientos en 2018

VEHÍCULO ESPACIAL			
	Ariane 5 ECA	Soyuz 2	Vega
Total lanzamientos en 2018	6	1	3
Confiabilidad en el 2018	100%	100%	1005%
Año primer lanzamiento	2002	2011	2012
Sitio del lanzamiento	Kourou	Kourou	Kourou
kg (lbs) puesto en órbitas LEO	21,000 (46,297)	4,850 (10,692)	2,300 (5,071)
Kg (lbs) puesto en órbitas GEO	9,500 (20,944)	4,500 (9,921)	0

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.1.5. *Japón.* Los centros espaciales japoneses Kagoshima y Tanegashima, cumplen funciones de lanzamiento de cohetes con fines de posicionamiento de cargas útiles de diferentes usos y distancias en el espacio (Japan Aerospace Agency -JAXA-, 2015). Desde ellos se lanzan los vehículos espaciales H-II A y Épsilon (Marín, 2019).

En la tabla 9 se pueden observar los vehículos espaciales japoneses que fueron lanzados en 2018, desde las estaciones japonesas (Federal Aviation Administration, 2018), así como la confiabilidad de éstos en el cumplimiento de su misión y la masa de las cargas útiles puestas en órbita.

Tabla 9. Vehículos espaciales japoneses y lanzamientos en 2018

VEHÍCULO ESPACIAL		
	H-IIA	EPSILON
Total de lanzamientos en el 2018	2	2
Confiabilidad en el 2018	100 %	100 %
Año del primer lanzamiento	2001	2013
Sitio del lanzamiento	Tanegashima	Tanegashima
kg (lbs) puesto en órbitas LEO	10,000 (23,046)	700 - 1,200 (1,543-2,646)
kg (lbs) puesto en órbitas GEO	6,000 (13,228)	0

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.1.6. *India.* Sriharikota es el centro espacial ubicado en una isla en el estado de Andhra Pradesh, al sur de la India (Indian Space Reserch Organisation -ISRO-, 2016).

Tiene capacidad para el posicionamiento de satélites de órbita polar y geoestacionaria, por lo que desde este centro espacial se pueden lanzar vehículos como PSLV CA, PSLV XL, y GSLV (Marín, 2019).

En la tabla 10 se pueden observar los vehículos espaciales indios que fueron lanzados durante 2018 (Federal Aviation Administration, 2018); asimismo, la confiabilidad de los mismos en el cumplimiento de su misión y la masa de las cargas útiles puestas en órbita.

Tabla 10. Vehículos espaciales indios y lanzamientos en 2018

VEHÍCULO ESPACIAL			
	PSLV CA	PSLV XL	GSLV Mk. II
Total de lanzamientos en el 2018	4	2	4
Confiabilidad en el 2018	100 %	100 %	100 %
Año del primer lanzamiento	2009	2012	
Sitio del lanzamiento	Satish Dhawan	Satish Dhawan	Satish Dhawan
Kg (lbs) puesto en órbitas LEO	2,100 (4,630)	1,800 (3,968)	5,000 (11,023)
Kg (lbs) puesto en órbitas GEO	0	1,140 (2,513)	2,500 (5,516)

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.2. Vehículos espaciales. Existen dos escenarios sobre los cuales se realizó el análisis general del costo de la órbita, así:

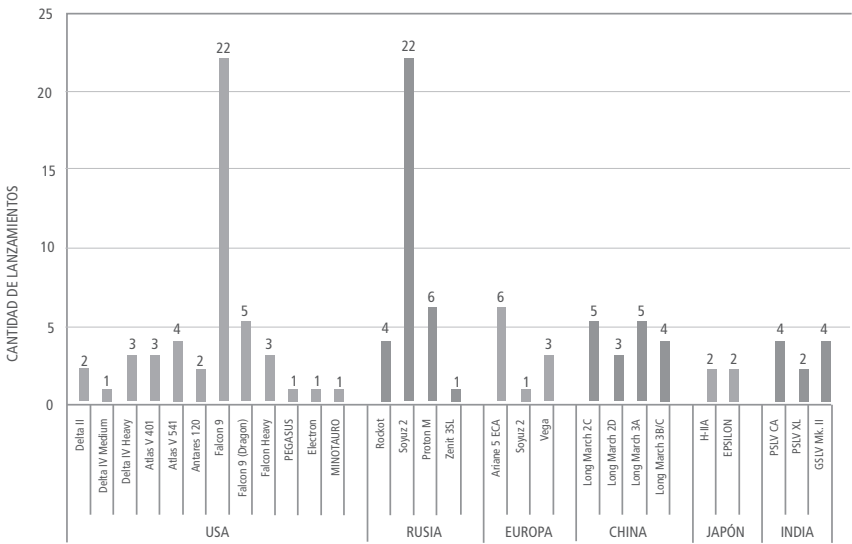
El vehículo espacial ubica el satélite en una órbita LEO, y este, con sistema de propulsión propia, continúa a la órbita de transferencia y posteriormente a la órbita GEO.

El vehículo espacial ubica el satélite en la órbita de transferencia MEO/GTO y, posteriormente, el satélite con sistema de propulsión propia, se posiciona en la órbita GEO, aprovechando una velocidad inicial que fue trasferida del propio cohete o vehículo espacial al dejarlo en dicha órbita de transferencia.

Para cada caso los costos son diferentes, dependiendo del tipo de vehículo; además, un satélite con características como las descritas para Colombia, SGC, viajaría en un vehículo espacial como parte de toda la carga útil.

En la figura 36 se pueden observar los lanzamientos discriminados por tipo de vehículo, realizados durante el año 2018.

Figura 36. Lanzamientos según el vehículo y país en 2018



Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2018).

2.3.3.3. Costos vehículo vs. kilogramo órbita. En esta sección se plantean unos costos aproximados con relación al tipo de vehículo y las órbitas en donde se ubicaron las cargas útiles.

2.3.3.3.1. Órbita LEO. De acuerdo con lo expuesto por la Federal Aviation Administration (2018), Space Exploration (2014) y Spaceflight (2016), se plantean unos costos aproximados que varían de acuerdo con la dinámica propia del mercado (Futron Corporation, 2002; National Aeronautics and Space Administration -NASA-, 2014), como se observa en la tabla 11.

Tabla 11. Costo kilogramo vs. vehículo,
según lanzamientos 2018 en órbitas LEO

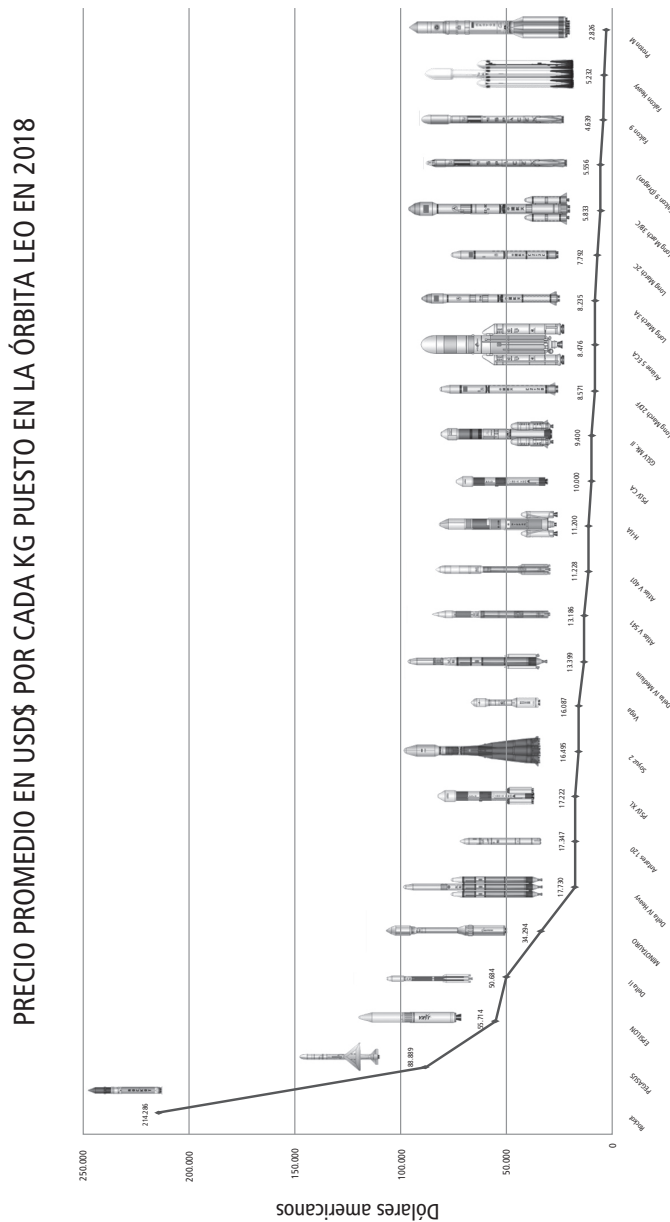
Vehículo	Costo lanzamiento USD\$	Carga útil Kg.	US\$ por Kg.
Delta II	137.000.000	2.703	50.684
Delta IV Medium	164.000.000	12.240	13.399
Delta IV Heavy	400.000.000	22.560	17.730
Atlas V 401	110.000.000	9.797	11.228
Atlas V 541	230.000.000	17.443	13.186
Antares 120	85.000.000	4.900	17.347
Falcon 9	61.000.000	13.150	4.639
Falcon 9 (Dragon)	50.000.000	9.000	5.556
Falcon Heavy	270.000.000	63.800	4.232
PEGASUS	40.000.000	450	88.889
ELECTRON	164.000.000	150	1.093.333
MINOTAURO	50.000.000	1.458	34.294
Rocket	390.000.000	1.820	214.286
Soyuz 2	80.000.000	4.850	16.495
Proton M	65.000.000	23.000	2.826
Ariane 5 ECA	178.000.000	21.000	8.476
Vega	37.000.000	2.300	16.087
Long March 2C	30.000.000	3.850	7.792
Long March 2D/F	30.000.000	3.500	8.571
Long March 3A	70.000.000	8.500	8.235
Long March 3B/C	70.000.000	12.000	5.833
H-IIA	112.000.000	10.000	11.200
EPSILON	39.000.000	700	55.714
PSLV CA	21.000.000	2.100	10.000
PSLV XL	31.000.000	1.800	17.222
GSLV Mk. II	47.000.000	5.000	9.400

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2014, 2015, 2017, 2018).

En la figura 37 se puede observar los costos aproximados por kilogramo, así como la masa total en carga útil que puede movilizar el vehículo espacial. En las órbitas LEO, se establece que los precios de lanzamiento disminuyen con el tamaño del vehículo espacial, lo cual está relacionado con su capacidad de carga útil (Federal News Network Staff, 2014).

De igual manera, los vehículos espaciales de la India son muy económicos en valor por lanzamiento (Princeton University, 2010), y el kilogramo puesto en órbita LEO menos costoso, está en los vehículos Protón M Ruso y Falcón Heavy de Estados Unidos, donde oscila entre los US\$4.232 y US\$2.826.

Figura 37. Kilogramo por vehículo según lanzamientos de 2018 para órbitas LEO



Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2014, 2015, 2017, 2018).

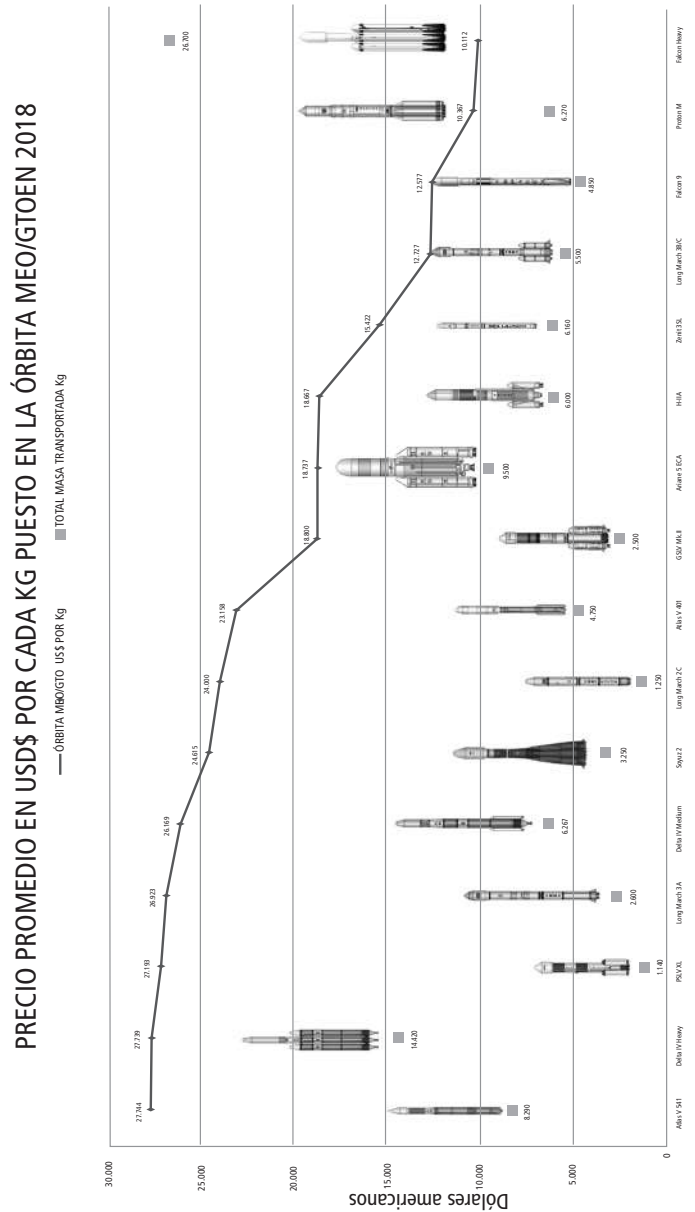
2.3.3.3.2. *Órbita MEO/GTO.* De acuerdo con Futron Corporation (2002), Space Exploration (2014), Federal News Network Staff (2014), Federal Aviation Administration (2014, 2015, 2017, 2018) y Spaceflight (2016), los costos aproximados en órbita MEO/GTO son los siguientes:

Tabla 12. Costo kilogramo vs. vehículo según lanzamientos 2018 en órbitas MEO/GTO

Vehículo	Costo lanzamiento USD\$	Carga útil Kg.	US\$ por Kg
Delta IV Medium	164.000.000	6.267	26.169
Delta IV Heavy	400.000.000	14.420	27.739
Atlas V 401	110.000.000	4.750	23.158
Atlas V 541	230.000.000	8.290	27.744
Falcon 9	61.000.000	4.850	12.577
Falcon Heavy	270.000.000	26.700	10.112
Soyuz 2	80.000.000	3.250	24.615
Proton M	65.000.000	6.270	10.367
Zenit 3SL	95.000.000	6.160	15.422
Ariane 5 ECA	178.000.000	9.500	18.737
Long March 2C	30.000.000	1.250	24.000
Long March 3A	70.000.000	2.600	26.923
Long March 3B/C	70.000.000	5.500	12.727
H-IIA	112.000.000	6.000	18.667
PSLV XL	31.000.000	1.140	27.193
GSLV Mk. II	47.000.000	2.500	18.800

Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2014, 2015, 2017, 2018).

Figura 38. Kilogramo por vehículo según lanzamientos 2018 para órbitas MEO/GTO



Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2014, 2015, 2017, 2018).

En la figura 38 se observan los costos aproximados por kilogramo, así como la masa total en carga útil que puede movilizar el vehículo espacial. Para las órbitas MEO/GTO, los precios de los vehículos espaciales rusos y estadounidenses son muy económicos, gracias a su relación capacidad de carga versus costo de lanzamiento; en tal virtud, el costo por kilogramo puesto en órbita MEO/GTO oscila entre los US\$10.367 para el Protón M y US\$10.112 para el Falcon Heavy.

2.3.3.4. Satélites según su masa. La clasificación de los satélites según su masa (Federal Aviation Administration, 2016), determina que, de acuerdo con sus características, el Satélite Geoestacionario Colombiano (SGC), es un satélite pequeño (tabla 13).

Tabla 13. Clasificación de los satélites pequeños según su masa

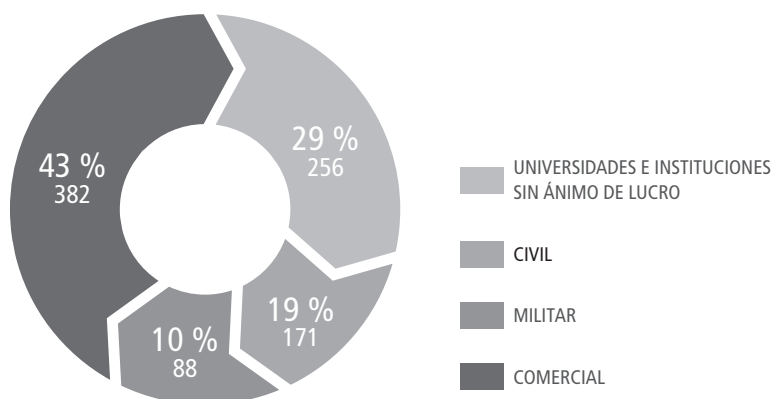
Satélites pequeños	
Clase de satélite	Kilogramos (Kg)
Femto (Cubesat)	0,01 - 0,1
Pico (Cubesat)	0,11 - 1
Nano (Cubesat)	1,1 - 10
Micro	11 - 200
Mini	201 - 600
Small	601 - 1200

Fuente: Federal Aviation Administration (2016).

En la figura 39 se muestra la distribución, según su uso, de los satélites pequeños lanzados al espacio entre 2003 y 2018. Los proveedores de servicios de lanzamiento en todo el mundo enviaron 466 naves al espacio, aunque 23 sufrieron fallas en su lanzamiento (Federal Aviation Administration, 2018).

Figura 39. Cantidad de satélites pequeños según su uso

DESTINACIÓN DE SATÉLITES LANZADOS ENTRE 2003 Y 2018



Fuente: Elaboración propia con información de Federal Aviation Administration (2014, 2015, 2016, 2017, 2018).

Ahora bien, cabe resaltar que los satélites geoestacionarios puestos en órbita entre febrero del año 1963 y agosto del año 2019 suman en total 962 (N2YO.com, 2019), similares al Satélite Geoestacionario Colombiano (SGC) y, considerando la tabla 12 y la capacidad de llevar 1.000 kilogramos a órbitas MEO/GTO, se puede inferir que el costo de poner el SGC en órbita oscila entre USD\$ 27.739 y USD\$ 10.112 por kilogramo según el vehículo.

3. Colombia: una plataforma de lanzamiento para cohetes y vehículos espaciales

Considerando la creciente demanda de los países por recursos naturales vitales, como el agua, el oxígeno, la fauna y la flora, que garantizan la sostenibilidad de los pueblos, cobra gran importancia la necesidad de ahorro en el consumo de combustibles fósiles, ya que no solo contaminan y afectan a importantes reservas naturales del planeta, sino también se hacen

cada vez más onerosos por su creciente escasez en la Tierra. De allí que se vengán desarrollando todos los esfuerzos posibles para la gestión eficiente de los recursos; en consecuencia, surge la necesidad de buscar elementos basados en la ciencia, la tecnología, los procedimientos, la revisión de las teorías y las leyes de la física y la matemática, que permitan explotar las ventajas naturales propias de la Tierra, para reducir la contaminación generada por cohetes y vehículos espaciales en su recorrido hacia el espacio, que ya ha sido estudiada desde el Programa de las Naciones Unidas para el Análisis y Cuidado del Medio Ambiente (PNUMA), que además cuenta con apoyo y financiamiento de NASA, la Comisión Espacial Europea, la Organización Mundial de la Salud (OMS), y la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica (NOAA, 2018).

De esta forma, y a la par de los nuevos desarrollos tecnológicos, se busca presentar soluciones con resultados más eficientes en el transporte de personas, material, equipo y diferentes tipos de suministros para la explotación del espacio, así como la proyección del ser humano fuera del Sistema Solar, paso inevitable en la evolución de la sociedad y la conciencia humana (White, 1998). Para la Fuerza Aérea Colombiana, dentro de su misión constitucional y doctrina propia del uso del poder aéreo, está el logro de los fines del Estado como sostiene la Constitución Política de Colombia, 1991, lo cual supone el permanente desarrollo tecnológico, mejoramiento de procesos y estrategias, para garantizar el cumplimiento de la función constitucional plasmada en el artículo 217 de la Carta Magna.

Bajo esta premisa, y acatando los objetivos en materia de incursionar en la carrera espacial y la protección del medio ambiente, surgen grandes incógnitas; por ejemplo: ¿puede la posición geográfica de Colombia brindar ventajas naturales para el lanzamiento de vehículos espaciales, haciendo más eficiente el uso de combustibles líquidos y sólidos?

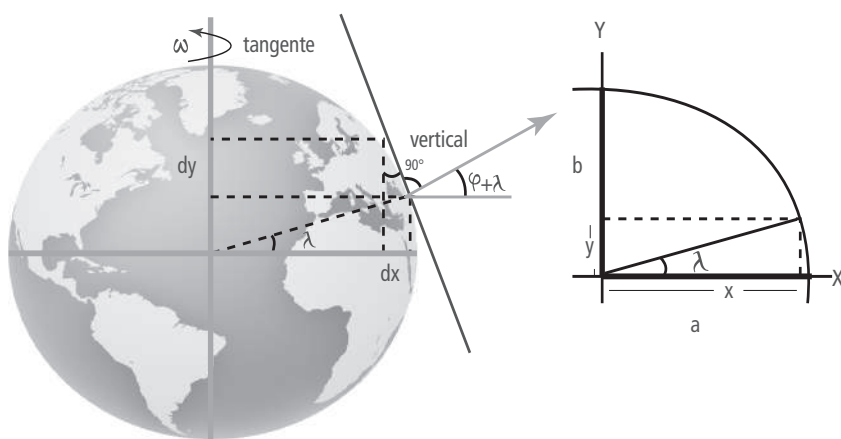
Para dar respuesta al interrogante anterior, se aplicó un método exploratorio que describe analíticamente el comportamiento de una variable asociada a la forma y la gravedad de la Tierra (García, 2010), las leyes de Newton en una estrecha relación con la Mecánica celeste, las leyes de Kepler, y el uso de combustibles líquidos y sólidos para la generación de la velocidad requerida para que los vehículos espaciales abandonen la

Tierra y posicionen cargas útiles en órbitas alrededor del planeta. En virtud de lo expuesto se aplican herramientas de análisis matemático en las leyes de la física, para demostrar cómo las ventajas naturales que ofrece el planeta Tierra pueden permitir un uso más eficiente de los combustibles para el lanzamiento de vehículos espaciales, en contraposición a los costos de poner cargas útiles en el espacio.

3.1. La forma de la Tierra

Con base en lo dicho, es importante definir la forma de la Tierra; para ello se construye el concepto matemático que demuestra la ventaja de la posición natural de la línea del ecuador en el globo terráqueo para el lanzamiento de vehículos espaciales y cohetes (Poveda, Rodríguez, Vallejo y Ocampo, 2018). En este sentido, la fuerza de gravedad es perpendicular a la superficie de la Tierra en cualquiera de sus puntos. Como se observa en la figura 40, la línea recta a la derecha del planeta representa una tangente sobre cualquier punto de la superficie, mientras que la línea angular demuestra cómo la gravedad resulta ser un componente vertical de fuerza hacia el centro del planeta.

Figura 40. Forma de la Tierra y componente de fuerza de la gravedad



Fuente: García (2010).

Como la Tierra es un geoide achatado en el centro y no una esfera perfecta, se tienen diferentes mediciones físicas, dependiendo del punto de la Tierra en donde se tomen dichas medidas; dos de ellas son la gravedad y el radio medido desde el centro de la Tierra hasta algún punto en la superficie (Poveda, et al., 2018). En la figura 40, aparece el ángulo λ , que es la latitud respecto a la línea del ecuador de la Tierra y, entendiendo que la pendiente de la tangente se relaciona a una curva, se define:

$$y = f_x \text{ cuando } X = 0 \quad (2.1)$$

A la ecuación (2.1) se le aplicó la derivada $\frac{dy}{dx}$ para resolverla y construirla, de modo que, de manera general describa la forma de la Tierra.

$$\tan(\lambda + \varphi) = -\frac{dy}{dx} \quad (2.2)$$

Otra manera de describir el sistema, solo en términos de x y de y es:

$$\tan(\lambda) = \frac{y}{x} \quad (2.3)$$

A partir de las expresiones (2.2) y (2.3) reemplazando $(\lambda + \varphi) = \alpha$ se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que representa de manera general la forma del planeta Tierra:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{(1 - \alpha)x}{y} \\ \int -\frac{(1 - \alpha)x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ (1 - \alpha) * x^2 + y^2 &= c \end{aligned} \quad (2.4)$$

En la ecuación (2.4) aparece una constante C , que determina una constante de integración; gracias a esta ecuación se puede resolver el binomio, de tal forma que se consigue calcular los dos radios extremos de la Tierra, es decir, un radio polar o mínimo y un radio ecuatorial o máximo. a radio ecuatorial, b radio polar.

$$\begin{cases} y = 0 & x = a \\ x = 0 & y = b \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\frac{c}{1-\alpha}} \quad (2.5)$$

$$b = \sqrt{c} \quad (2.6)$$

Si bien la figura de la Tierra no es una circunferencia perfecta, se puede aproximar a la figura descrita por una elipse (Piskunov, 2009).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aplicando las ecuaciones hasta ahora descritas, se obtiene que:

$a=6.378,140km$ de acuerdo con lo expuesto por (The International Astronomical Union, 1964), y el radio polar se describe como:

$$\begin{cases} a = \text{radio ecuatorial} = 6.378,140km \\ b = \text{radio polar} = 6.356,752km \end{cases} \quad (2.7)$$

Para el aplastamiento de la Tierra se obtiene que:

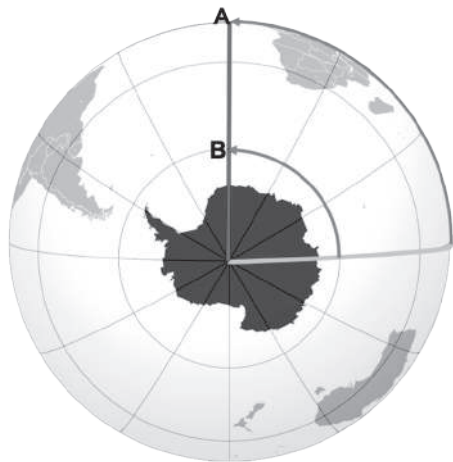
$$f = \frac{a-b}{a} \Rightarrow 1 - \sqrt{1-\alpha} \Rightarrow 3,3533 * 10^{-3} \quad (2.8)$$

3.2. La velocidad de rotación de la Tierra

Debido a que el giro de la Tierra sobre su propio eje es uno de sus movimientos, todo lo que esté sobre ella o en su interior gira simultáneamente, entorno de dicho eje; y, sabiendo que la Tierra es un esferoide achatado, se infiere que tiene una velocidad de giro diferente dependiendo de su posición sobre la superficie.

Esta velocidad es conocida como velocidad angular, siendo mayor dicha velocidad de manera proporcional a la distancia del eje de giro; es decir, a un radio o distancia del centro de la Tierra mayor, mayor velocidad.

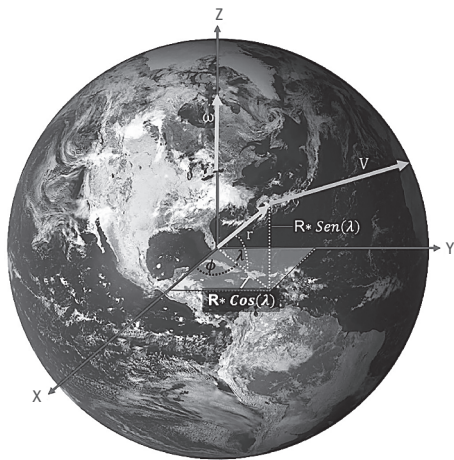
Figura 41. Velocidad angular



Fuente: Elaboración propia, modificación de imagen original de Wikipedia Maps.

Como puede observarse en la figura 41, desde la posición de la línea horizontal, la partícula *A* debe tener una velocidad angular superior, para llegar a la posición de la vertical al mismo tiempo que la partícula *B*. Para entrar en el contexto matemático de la velocidad, se desglosó paso a paso el análisis sobre la figura 42, así:

Figura 42. Vectores que describen la rotación de la Tierra



Fuente: Elaboración propia con información de Universidad de Sevilla (2002).

La velocidad sobre un punto específico de la superficie de la Tierra se puede expresar como el vector de posición resultante en función de $\vec{r}$ que:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v} \quad (2.9)$$

Siendo $\vec{\omega}$ la velocidad angular del planeta Tierra sobre su eje Z según la figura 42. Analizando ese vector $\vec{r}$ en función de la longitud x y latitud y , para obtener el vector de posición de acuerdo con la figura 3, se obtiene:

$$\vec{r}(\lambda, \phi) = \begin{cases} x = r \cos \lambda \cos \phi \\ y = r \cos \lambda \sin \phi \\ z = r \sin \lambda \end{cases} \quad (2.10)$$

Para poder calcular la velocidad se aplica la derivada respecto al tiempo t a la expresión (2.10) obteniendo:

$$\vec{v}(t) = r\omega \cos \lambda [-\sin \omega t, \cos \omega t, 0] \quad (2.11)$$

Al derivar nuevamente el vector velocidad de la expresión (2.11) respecto al tiempo, se halla la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2 \cos \lambda [\cos \omega t, \sin \omega t, 0] \quad (2.12)$$

Resolviendo la ecuación puntual para cada vector de velocidad y aceleración, éstos se reducen a las siguientes expresiones:

$$\vec{v} = r\omega \cos \lambda \quad (2.13)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \cos \lambda \quad (2.14)$$

En este punto de la ecuación de velocidad y aceleración, se requiere el cálculo de $\vec{\omega}$, la velocidad angular, para reducirla a solo una función en términos de λ es decir, de la latitud.

Acogiendo la teoría física del movimiento angular descrita por Zare (1988), y entendiendo que una revolución completa de la Tierra es 2π radianes, se deduce que:

$$\frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} = \omega = 2\pi f \quad (2.15)$$

$$v = \omega r \quad (2.16)$$

Siendo f la frecuencia con la que rota el planeta, T el periodo o tiempo que tarda en dar una vuelta completa sobre su propio eje.

3.3. Cálculos de energía

El cálculo de energía en vehículos espaciales, específicamente el generado en torno al movimiento, donde los apogeos descritos están en órbitas LEO o MEO/GTO, permite identificar la cantidad de energía requerida para alcanzar la altura de satelización o de puesta en órbita de transferencia.

Estas energías son muy importantes de calcular, porque la velocidad del vehículo espacial está estrechamente relacionada con la energía que éste desarrolle para alcanzar la altura objetivo sobre la superficie de la Tierra (Poveda, 2016).

La energía se describe por las siguientes expresiones matemáticas:

$$E_{Cinetica} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.17)$$

$$E_{Potencial} = \frac{GM}{r} \quad (2.18)$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM}{r} \quad (2.19)$$

Donde m es la masa del vehículo espacial, G es la constante universal de la gravitación (Universidad Politécnica de Madrid -UPM-, 2013) (De Orús, et al., 2007):

$$G = 6,6710 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{(Kg \cdot Seg^2)} \right] \quad (2.20)$$

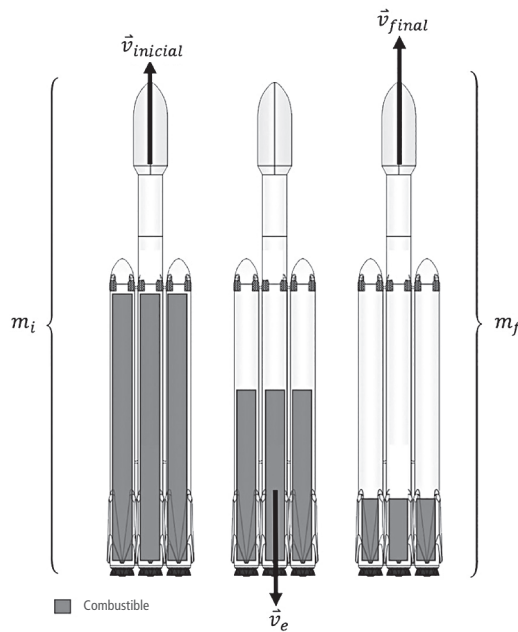
M es la masa de la Tierra. Para todos los cálculos se utiliza, de acuerdo con lo expuesto por (Neff, 1995), un valor de:

$$M=5.979 \times 10^{24} \text{ Kg} \quad (2.21)$$

3.3.1. Cálculos de combustible según velocidad requerida

En aplicación a lo presentado por École Polytechnique Fédérale de Lausanne -EPFL- (2018), en cuanto a la ecuación de Tsiolkovsky, el gasto de combustible vs. la velocidad de un cohete se puede describir de la siguiente manera:

Figura 43. Consumo de combustible de cohetes y vehículos espaciales



Fuente: Elaboración propia con información de EPFL (2018).

Para describir el comportamiento físico, se presenta la ecuación que incorpora las variables de velocidad inicial $\vec{v}_{inicial}$, velocidad de empuje $\vec{v}_e$, velocidad final $\vec{v}_{final}$ y las masas, de inicio m_i y final m_f respectivamente, como puede observarse en la figura 43, teniendo:

$$\Delta V = v_e \log_e \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \quad (2.22)$$

La expresión (2.22) o ecuación Tsiolkovsky se complementa incorporando a los cálculos el impulso específico I_{sp} y la fuerza de la gravedad a vencer.

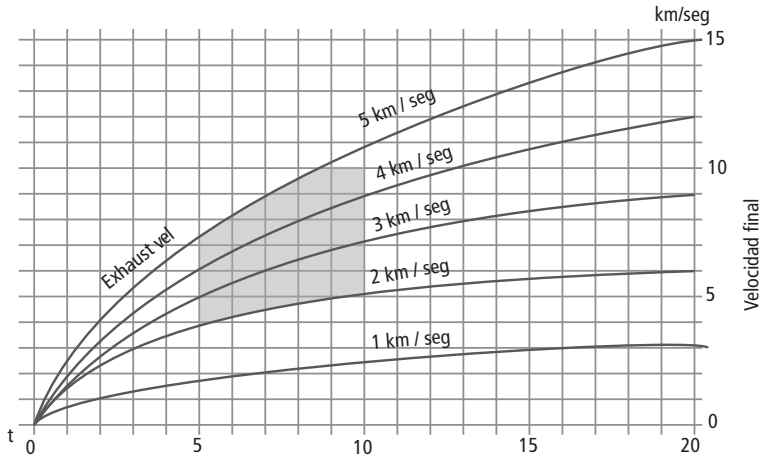
$$\Delta V = g * I_{sp} \log_e \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \quad (2.23)$$

Por otra parte, se calcula el combustible (masa) del vehículo espacial m_p , que requiere para alcanzar la velocidad deseada; esto se consigue desvinculando la expresión (2.23) en variables en términos de masa que faciliten el análisis de la siguiente forma:

$$\Delta V \Rightarrow \begin{cases} m_p = m_i \left[1 - e^{\left(-\frac{\Delta V}{g * I_{sp}} \right)} \right] \\ m_p = m_f \left[e^{\left(-\frac{\Delta V}{g * I_{sp}} \right)} - 1 \right] \end{cases} \quad (2.24)$$

La velocidad de empuje ideal para alcanzar una órbita sobre el planeta dependerá del vehículo y de la velocidad de escape mínima a desarrollar; esta velocidad en promedio es aproximadamente de 4,5 Km/s (EPFL, 2018) y un gasto aproximado del 90% de la m_i de combustible, alcanzando una velocidad final entre 5 Km/s y 10 Km/s. Según el tipo de combustible y peso total del vehículo, la relación al respecto puede observar en la figura 44.

Figura 44. Relación velocidad final vs. velocidad en la tobera



Fuente: Elaboración propia información de Clarke (1984).

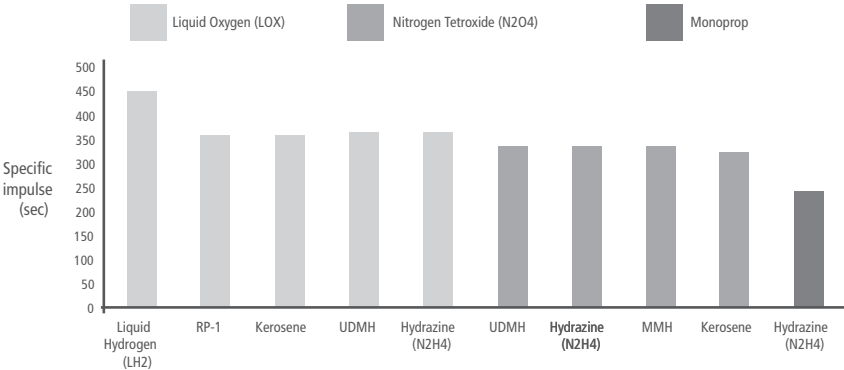
Al aumentar la velocidad de empuje, la velocidad final del vehículo también aumentará; En la figura 44 se puede observar que entre 5 y 10 minutos (horizontal). Por su parte, la velocidad de escape del planeta (vertical) a alcanzar, estará entre los 5 y 10 Km/Seg.

Se debe tener en cuenta que el tipo de combustible que usan cohetes y vehículos espaciales en el mundo es diferente en la mayoría de los casos; asimismo es necesario considerar el hecho de que cada combustible puede generar un máximo de velocidad diferente. En la figura 45, se exponen los tres grandes grupos de carburantes existentes para cohetes.

Cada uno de estos grupos de propelente genera un I_{sp} (expresión 2.23), impulso específico, que a la vez desarrolla una velocidad final diferente en el cohete o vehículo. Por ejemplo:

1. Monopropelentes-Hidracina (color verde) $I_{sp}=200$ a 250 seg genera en promedio de 2 a $2,5$ Km/s de velocidad de empuje $\vec{v}_e$.
2. Nitrógeno tetroxidado-UDMH, (N₂H₄) $I_{sp}=280$ a 300 seg genera en promedio de $2,8$ a $3,0$ Km/s de $\vec{v}_e$.
3. Oxígeno líquido-hidrógeno líquido $I_{sp}=450$ seg genera en promedio a $4,5$ Km/s de $\vec{v}_e$.

Figura 45. Impulso teórico específico en el vacío según el tipo de combustible



Fuente: EPFL (2018).

En el proceso matemático de demostrar la ventaja del lanzamiento de cohetes desde la línea del ecuador, se definen los radios aproximados en kilómetros tanto para el ecuador en latitud 0° como para el Polo Norte en la latitud 90°; también se definieron intervalos de quince grados de latitud en los cálculos, en referencia a la expresión (2.7) así:

$$\begin{cases} a = \text{radio ecuatorial} = 6.378,14\text{km} \\ b = \text{radio polar} = 6.356,75\text{km} \end{cases}$$

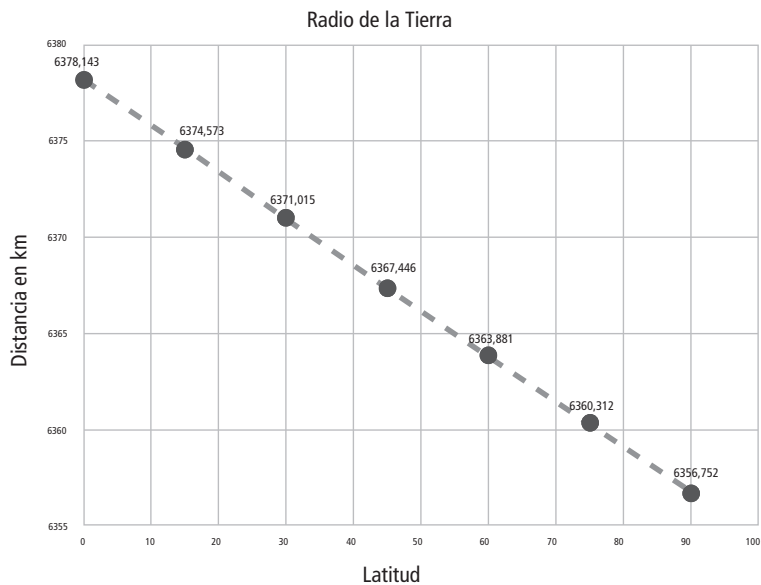
De las expresiones (2.3) y (2,4) se construye la tabla 16, donde se ve la relación de radios aproximados por latitud, despreciando elevaciones y definiendo la superficie de la Tierra a nivel del mar.

Tabla 16. Radio de la Tierra según su latitud

Latitud en grados	Radio en Km.
0	6356,752
15	6360,312
30	6363,881
45	6367,446
60	6371,015
75	6374,573
90	6378,143

Fuente: Elaboración propia.

Figura 46. Radio de la Tierra según su latitud



Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la tabla 16.

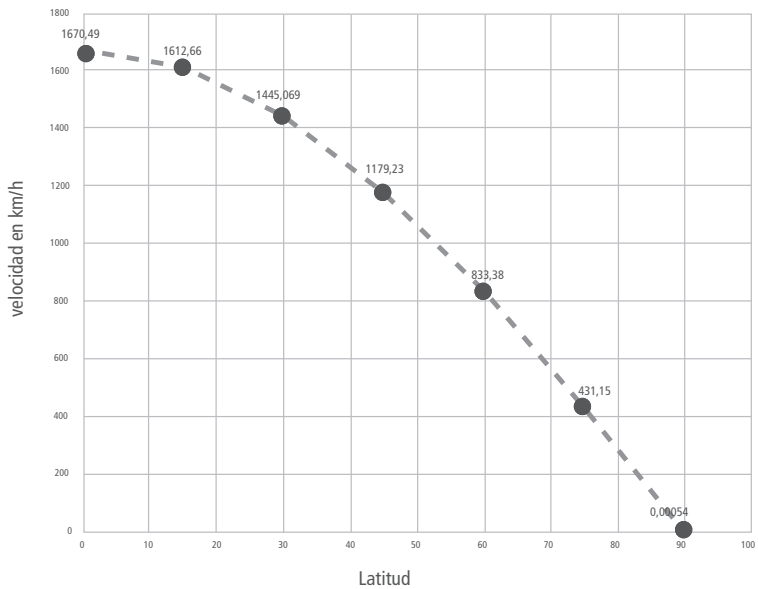
En la tabla 17 se ejecutan los cálculos de velocidad para cada una de las latitudes propuestas, aplicando las expresiones (2.13) y (2.16), donde λ es la latitud en grados, y que determinan los puntos de acuerdo con la figura 47.

Tabla 17. Velocidad de rotación de la Tierra según su latitud

Latitud en grados	Velocidad KM/H
0	1670,49
15	1612,66
30	1445,069
45	1179,23
60	833,38
75	431,15
90	0,00054

Fuente: Elaboración propia.

Figura 47. Curva de velocidad según latitud



Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la tabla 17.

La clasificación según la velocidad de los vehículos espaciales se da de acuerdo con la velocidad del sonido que pueden desarrollar. En la tabla 18 se puede observar dicha clasificación, así:

Tabla 18. Clasificación de los vehículos espaciales según su velocidad

Clasificación	Velocidad
Subsónico hasta	0,75 mach
Trans-sónico	0,75 a 1,2 mach
Supersónico	1,2 a 5 mach
Hipersónico	Mayor de 5 mach

Fuente: Elaboración propia.

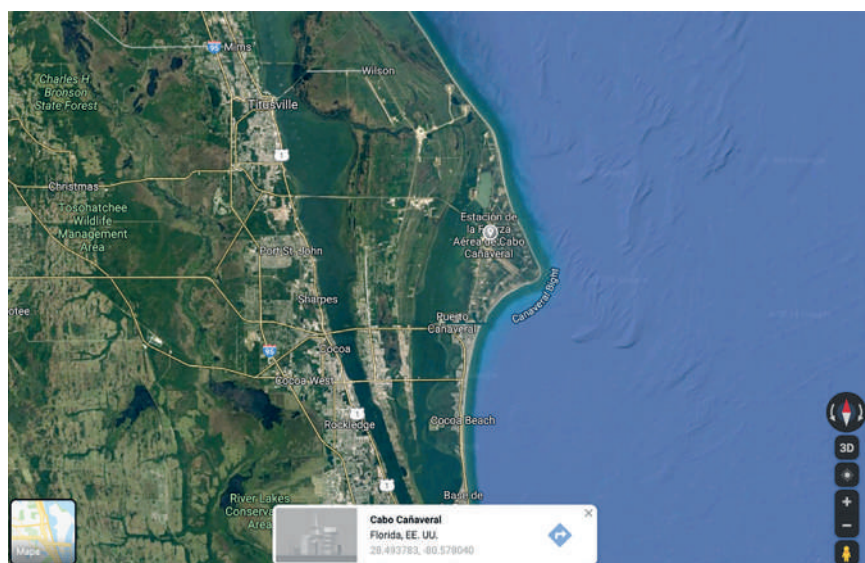
Existe también una clasificación menos habitual, que se refiere a los tipos de combustible diferenciándolos si el “propulsor usa combustible sólido o líquido” (Godínez, 2012).

Hoy en día, los combustibles líquidos proponen una tendencia por su versatilidad, potencia que generan y facilidad en la manipulación; por ejemplo, aparecen el LOX y RP-1 como en los vehículos tipo Falcon Heavy y Delta IV. A continuación, se definen unos aspectos técnicos genéricos de un vehículo espacial, que en este caso será el Falcon Heavy, como ejemplo, lo que permitirá definir una metodología para hacer los cálculos de cualquier vehículo:

- Velocidad de escape requerida: 8 km/seg.
- Masa (para cálculos de energía): 1'420.000 kg total del vehículo
- Masa de la carga útil: 64.000 kg

Los datos mencionados son útiles para hacer la comparación con dos latitudes conocidas y evidenciar matemáticamente la ventaja en el lanzamiento desde la línea del ecuador, en relación con una latitud 30, muy cercana a la latitud del Kennedy Space Center en la Florida (figura 48).

Figura 48. Kennedy Space Center, Florida-Estados Unidos



Fuente: Google. Maps Inc.

La información de la tabla 18 se contrasta con la velocidad de escape a desarrollar a partir de las expresiones de conservación de energía total (2.19):

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \quad (2.27)$$

$$v_e = \sqrt{2gR} = 11446.6 \text{ m/s} \quad (2.28)$$

$$v_e = 11.44 \text{ Km/s} \quad (2.29)$$

Usando las expresiones (2.27) y (2.28) se incorpora la variable que es la gravedad o intensidad del campo gravitatorio de la Tierra, definido como $g=9,81 \text{ m/s}^2$.

En la expresión (2.29) puede observarse la celeridad de escape del planeta Tierra; sin embargo, los vehículos espaciales, en teoría, con el 70% de esa rapidez pueden alcanzar una velocidad que les permita escapar de la Tierra, es decir:

$$v = 28845 \text{ Km/h} \quad (2.30)$$

$$v = 8 \text{ Km/s} \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta la tabla 17 y las expresiones (2.30) y (2.31) se obtienen los resultados expuestos en la tabla 19, la cual evidencia cuánta velocidad es requerida para un cohete lanzado desde una posición en latitud cero o línea del ecuador, en contraste con otras latitudes sin importar si son norte o sur.

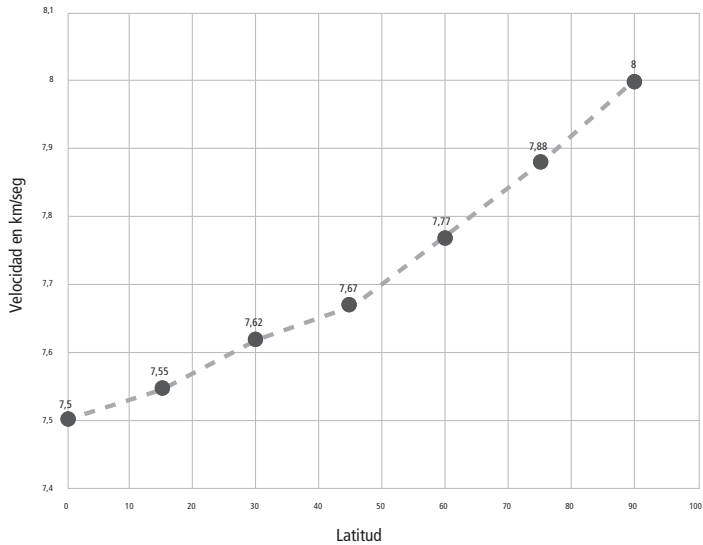
Tabla 19. Velocidades de escape a desarrollar según latitud

Velocidad de escape en Km/s	Latitud en grados	Velocidad rotación Km/s	Velocidad requerida por el vehículo espacial en Km/s
8	0	0,45641	7,50
	15	0,44796	7,55
	30	0,38140	7,62
	45	0,32756	7,67
	60	0,23149	7,77
	75	0,11976	7,88
	90	1,5113 x 10-7	8,00

Fuente: Elaboración propia.

Aterrizando la tabla 19 en la figura 49, se puede observar cómo al aumentar la latitud, también aumenta la velocidad que necesita el vehículo espacial para salir a órbita terrestre.

Figura 49. Velocidad de escape requerida según la latitud del lanzamiento



Fuente: Elaboración propia con base en los datos de la tabla 19.

Al observar el comportamiento de las velocidades en la tabla 19 y figura 49 se procedió con la siguiente comparación:

3.3.1.1. En latitud cero (línea del ecuador). La velocidad de rotación es $0,456 \text{ Km/s}$ o su equivalente a $1670,49 \text{ km/h}$ y la velocidad de escape del planeta Tierra ya calculada es de 8 km/s o su equivalente 28845 km/h . Se puede inferir que un cohete o vehículo espacial lanzado desde la línea del ecuador solo debe desarrollar una velocidad de 27174.5 Km/h

3.3.1.2. En latitud treinta (cercano a Kennedy Space Center). La velocidad de rotación es $0,401 \text{ Km/s}$ o su equivalente a $1445,068 \text{ km/h}$ y la velocidad de escape del planeta Tierra ya calculada es de 8 km/s o su equivalente 28845 km/h . Se puede inferir que un cohete o vehículo espacial lanzado desde la latitud 30 debe desarrollar una velocidad de 27400 Km/h .

La diferencia de velocidad a desarrollar por el vehículo desde el ecuador es inferior en 225.5 km/h , lo que en un vehículo de una masa superior al millón de kilos representa ahorro de energía para alcanzar la velocidad de escape requerida.

El vehículo espacial usado como ejemplo es el Falcon Heavy, el cual puede consumir la siguiente cantidad aproximada de combustible:

- Combustible LOX 363 toneladas
- Combustible RP-1 157 toneladas

Figura 50. Cohete Falcon Heavy SpaceX-parche de misión



Fuente: SpaceX (2019).

Los Falcon Heavy de mediano y largo alcance comparten una capacidad aproximada para cargar combustibles de 520 toneladas.

Usando la (2.23) y que el oxígeno líquido-hidrógeno líquido LOX que tiene un $I_{sp}=450 \text{ seg}$ y representa $4,5 \text{ Km/s}$ de velocidad de empuje, se plantea el siguiente racionamiento, m_p (m_{pi} masa de combustible inicial, m_{pf} masa de combustible final) de la expresión (2.24), considerando que los ΔV o la variación de velocidad según la latitud que fue hallada en la tabla 19, y que la velocidad final se halla al consumir el 90% del combustible, se resuelven las expresiones de la siguiente forma:

Cálculos de consumo de LOX en latitud cero o línea del ecuador:

$$\begin{cases} m_p = m_i \left[1 - e^{\left(\frac{-\Delta V}{g \cdot I_{sp}} \right)} \right] \\ m_p = m_f \left[e^{\left(\frac{-\Delta V}{g \cdot I_{sp}} \right)} - 1 \right] \end{cases} \text{ecuación general.}$$

$$\begin{cases} m_{pi} = 363.000Kg \left[1 - e^{\left(\frac{-7.5km/s}{9.8m/s^2 \cdot 450s} \right)} \right] \\ m_{pf} = 36.300Kg \left[e^{\left(\frac{-7.5km/s}{9.8m/s^2 \cdot 450s} \right)} - 1 \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{pi} = 297731 \text{ Kg} \\ m_{pf} = -297731 \text{ Kg} \end{cases}$$

Cálculos de consumo de LOX en latitud treinta (cercano a Kennedy Space Center).

$$\begin{cases} m_{pi} = 363.000Kg \left[1 - e^{\left(\frac{-7.62km/s}{9.8m/s^2 \cdot 450s} \right)} \right] \\ m_{pf} = 36.300Kg \left[e^{\left(\frac{-7.62km/s}{9.8m/s^2 \cdot 450s} \right)} - 1 \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{pi} = 298510 \text{ Kg} \\ m_{pf} = -298599 \text{ Kg} \end{cases} \quad (2.33)$$

La interpretación a los valores positivos hallados en las expresiones (2.32) y (2.33) permite evidenciar que el mismo vehículo o cohete requiere una velocidad diferente para salir del planeta, siendo inferior en la línea del ecuador.

Al contratar estos valores respecto a la masa en combustible requerido para lanzar desde la línea del ecuador, se evidencia que se requiere menos combustible usando el mismo vehículo; es decir, se presenta un ahorro de 1.778,93 kilos de combustible LOX.

Ahora, aplicando una metodología de cálculo igual al RP-1 se obtiene: Cálculos de consumo de RP-1 en latitud cero (línea del ecuador).

$$\begin{cases} m_{pi} = 157.000Kg \left[1 - e^{\left(\frac{7.5km/s}{9.8m/s^2 + 450s} \right)} \right] \\ m_{pf} = 15.700Kg \left[1 - e^{\left(\frac{7.5km/s}{9.8m/s^2 + 450s} \right)} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{pi} = 128338 Kg \\ m_{pf} = -128338 Kg \end{cases} \quad (2.34)$$

Cálculos de consumo de RP-1 en latitud treinta (cercano a Kennedy Space Center).

$$\begin{cases} m_{pi} = 157.000Kg \left[1 - e^{\left(\frac{7.62km/s}{9.8m/s^2 + 450s} \right)} \right] \\ m_{pf} = 15.700Kg \left[1 - e^{\left(\frac{7.62km/s}{9.8m/s^2 + 450s} \right)} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{pi} = 129108 Kg \\ m_{pf} = 12910,8 Kg \end{cases} \quad (2.35)$$

La interpretación de los valores positivos hallados en las expresiones (2.34) y (2.35) permite evidenciar que el mismo vehículo o cohete en este caso, tiene un ahorro en RP-1 de 510,6 kilos. Al sumar estos dos resultados en el Falcon Heavy, el ahorro en peso de combustible LOX y RP-1 (1778,93+769,40) al lanzar desde la línea del ecuador es de 2548,33 Kg de combustible que, en últimas, se puede usar en más carga útil o en un ahorro económico significativo de combustible.

El costo promedio del LOX es de \$USD 7,55 por Kg (Wade, 1980) y RP-1 de US\$5,35 por Kg (Quimi-Net, 2016); en tal virtud, el ahorro en combustible LOX y RP-1 al lanzar desde el ecuador será:

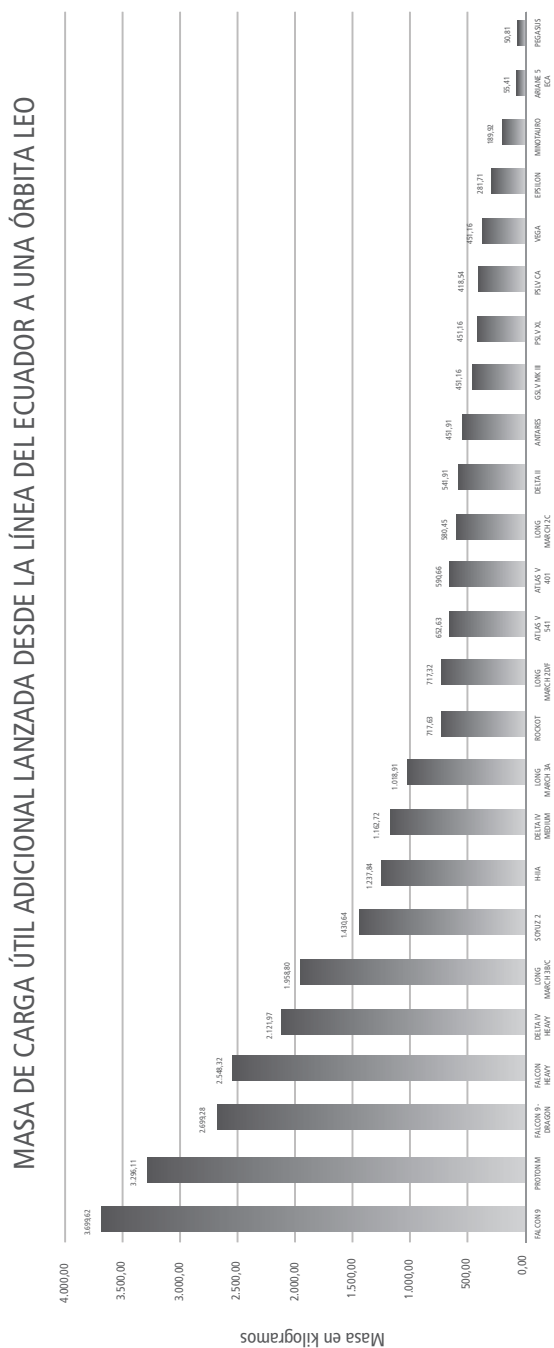
- LOX USD\$ 13.430,92
- RP-1 USD\$ 4.116,29

El ahorro en el costo de combustible es entonces aproximadamente de USD\$17.542; la diferencia se hace aún más significativa, cuando la variable a calcular es el costo de un kilogramo puesto en el espacio, considerando las tablas 11 y tabla 12 en órbitas LEO y MEO/GTO para el vehículo Falcon Heavy, oscilando entre poco más de diez millones de dólares (USD\$ 10'784.505) y poco menos de veintiséis millones de dólares (USD\$ 25'768.648) respectivamente.

Al aplicar la misma metodología en los demás vehículos espaciales lanzados en 2018, analizando sus sitios de lanzamiento, costos y masas, versus el lanzamiento desde la línea del ecuador, se observa en la figura 51 la masa en carga útil que se puede poner de más usando el mismo vehículo en órbitas LEO. En la figura 52 será la masa a favor al lanzar desde la línea del ecuador a órbitas MEO/GTO.

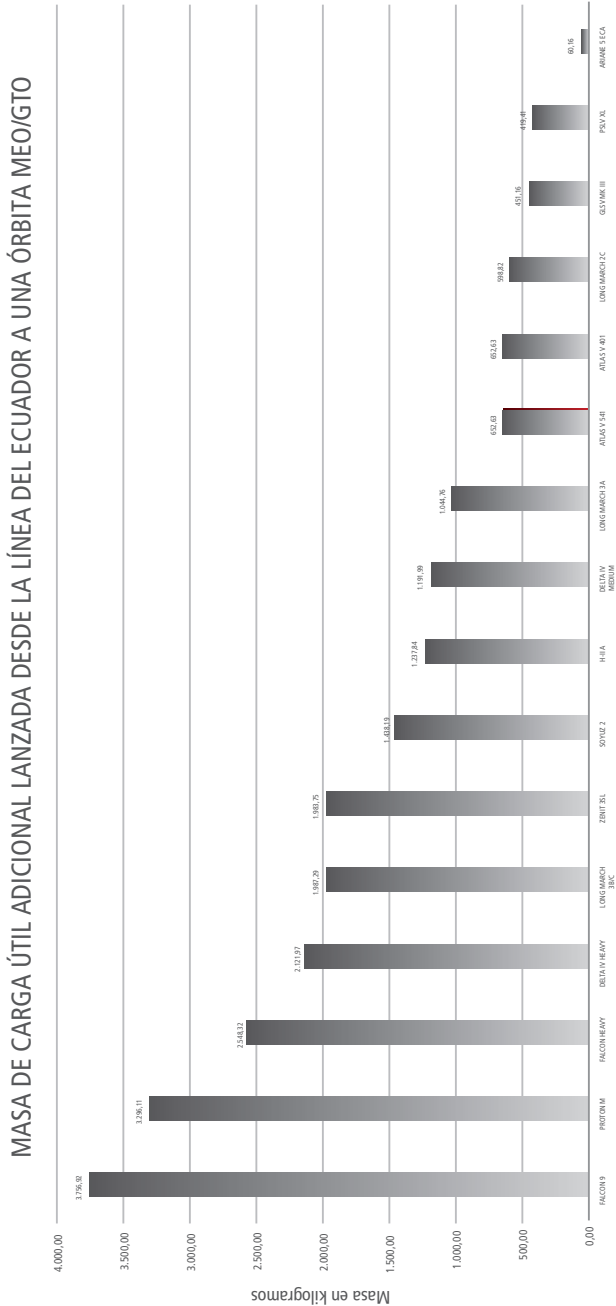
Por otra parte, haciendo el mismo ejercicio de convertir las masas expuestas en las figuras 52 y 53 en costos por kilogramo puesto en las órbitas descritas, se encuentran los valores en dólares americanos de las ganancias aproximadas en carga útil al lanzar desde la línea del ecuador a la órbita LEO en la figura 54, y a la órbita MEO/GTO en la figura 55.

Figura 51. Masa adicional en carga útil a órbita LEO



Fuente: Elaboración propia.

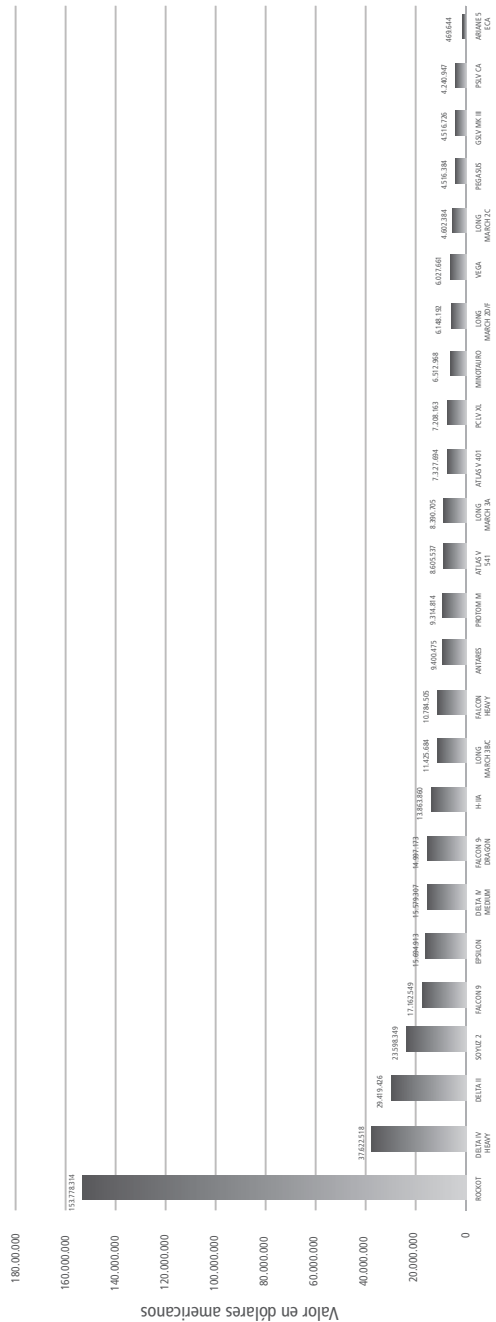
Figura 52. Masa adicional en carga útil a órbita MEO/GTO



Fuente: Elaboración propia.

Figura 53. Ganancia adicional en carga útil a órbita LEO

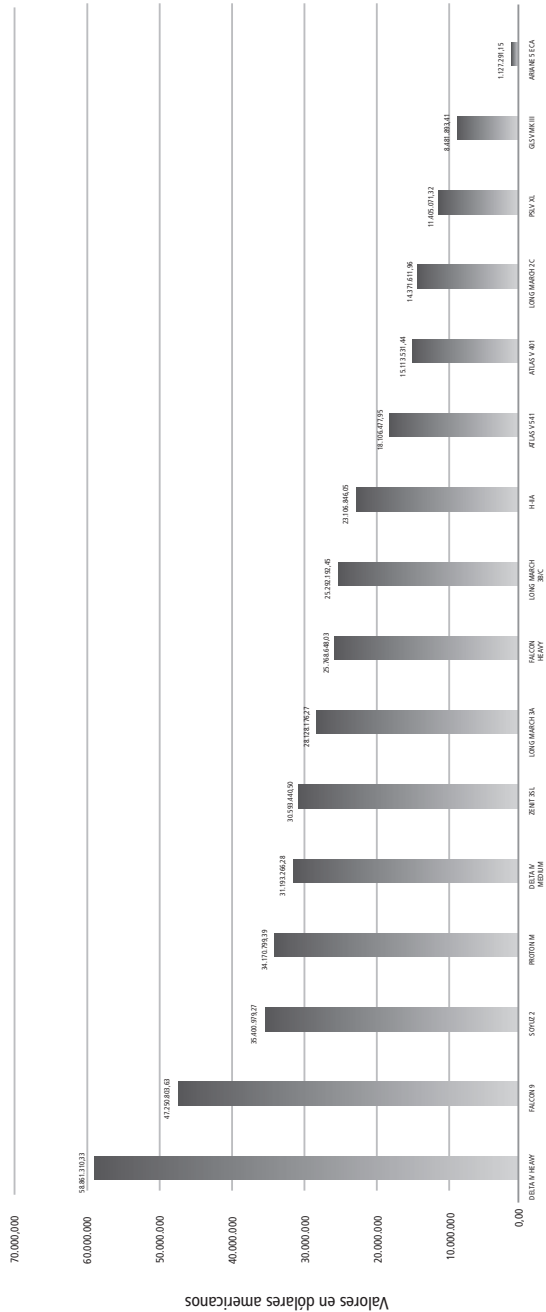
GANANCIA APROXIMADA POR CARGA ÚTIL
LANZADA DESDE LA LÍNEA DEL ECUADOR A UNA ÓRBITA LEO



Fuente: Elaboración propia.

Figura 54. Ganancia adicional en carga útil a órbita LEO

GANANCIA APROXIMADAMENTE POR CARGA ÚTIL
LANZADA DESDE LA LÍNEA DEL ECUADOR A UNA ÓRBITA MEO/GTO



Fuente: Elaboración propia.

4. Conclusiones

El análisis del problema de los dos cuerpos, la ecuación del movimiento en torno de las fuerzas ejercidas por la Tierra y el SCG, dan un acercamiento teórico al diseño y planeamiento de la órbita de un satélite que permita a futuro corroborar la minucia técnica del vuelo de los satélites colombianos. La inclinación máxima de las órbitas LEO o MEO/GTO para el máximo aprovechamiento de un satélite en Colombia debe ser de 16 grados, para que la cobertura en su vuelo sobre el territorio nacional garantice un paso vertical sobre todos los puntos geográficos del país; pero en la medida que crezca la red de satélites colombianos en el espacio, los cálculos de cobertura deberán ser complementados.

La aplicación de las bases de las ciencias del espacio, de las leyes de Kepler, las leyes de Newton, la ecuación Tsiolkovsky, las ciencias de la Tierra, la mecánica celeste, evidencian la sostenibilidad y rentabilidad del negocio espacial, representada en los precios globales promedio de poner cargas útiles en el espacio que, en conjunción con los combustibles, los tipos de vehículos espaciales o cohetes, justifican ver en Colombia una gran oportunidad en el desarrollo de la carrera espacial desde el diseño y construcción de puertos espaciales sobre la línea del ecuador de Colombia, que permitan ofertar al negocio espacial global, un punto de lanzamiento que economiza combustible y permite llevar más carga útil al espacio.

Al existir una serie de restricciones geopolíticas sobre la disponibilidad de ubicaciones geoestratégicas para el establecimiento de puertos espaciales en el mundo, Colombia es uno de los 13 países ecuatoriales que, por su desarrollo militar, desarrollo económico y posición geoestratégica, representa uno de los mejores prospectos para la instalación de lanzadores espaciales.

